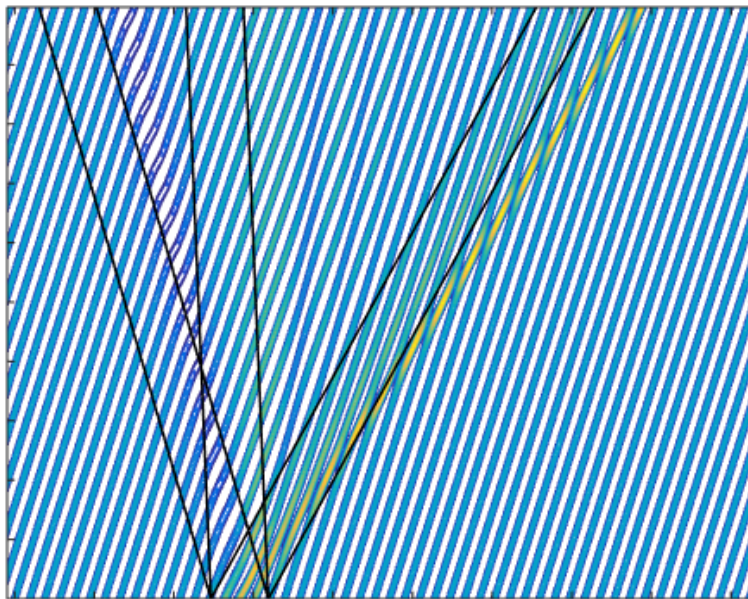


Institut
Camille
Jordan

Laboratoire de recherche en mathématiques Lyon/Saint-Étienne

Ondes périodiques dans des systèmes d'ÉDP hamiltoniens

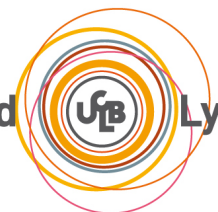
Stabilité, modulations et chocs dispersifs



Colin Mietka

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard



Lyon 1



N° d'ordre NNT : 2017LYSE1031

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

École Doctorale InfoMath

Spécialité de doctorat : Mathématiques

Soutenue publiquement le 28/02/2017, par :
Colin, Jean, Aloïs Mietka

**Ondes périodiques dans des systèmes d'ÉDP
hamiltoniens**

Stabilité, modulations et chocs dispersifs

Devant le jury composé de :

Mme. Martine Marion, Professeure, École Centrale de Lyon,	Présidente
Mme. Brigitte Bidégaray-Fesquet, Chargée de Recherche, CNRS,	Examinatrice
M. Didier Bresch, Directeur de Recherche, CNRS,	Rapporteur
M. Stephan De Bièvre, Professeur, Université Lille 1,	Rapporteur
M. Michael Shearer, Professeur, North Carolina State University,	Examineur
Mme. Sylvie Benzoni-Gavage, Professeure, Université Lyon 1	Co-directrice
M. Miguel Rodrigues, Professeur, Université Rennes 1	Co-directeur

Remerciements

La rédaction de ces quelques mots est pour moi l'occasion de faire un bilan sur mes trois années passées à l'Institut Camille Jordan. Mes pensées vont à tous ceux qui font que le travail de thèse n'est pas si solitaire. Mes deux directeurs sans qui, j'en suis convaincu, je n'en serais pas arrivé là. Sylvie, tu n'as eu de cesse de me pousser à me dépasser et je t'en suis infiniment reconnaissant. Tes conseils d'une grande valeur et ton soutien inconditionnel ont été des plus précieux et je suis heureux d'avoir tant appris à tes côtés. Miguel, je te remercie pour l'extraordinaire patience dont tu as souvent dû faire preuve devant mes questions incessantes et répétées. Je garderai un souvenir impérissable de nos régulières discussions au tableau qui m'ont plus éclairées que n'importe quelle lecture. Enfin je vous remercie tous les deux pour le temps que vous m'avez consacré pendant ses trois années et lors de votre relecture avisée de mon travail.

Je voudrais également adresser ma gratitude à Stephan De Brièvre et Didier Bresch qui ont accepté de relire et commenter ce manuscrit. Vos conseils m'ont permis d'améliorer significativement la présentation de mes résultats et je pense que la présente version est tout simplement meilleure que la première. Je remercie également les membres restants du jury, Brigitte Bidégaray-Fesquet, Martine Marion et Michael Shearer de s'être rendus disponibles et de m'accorder une partie de leur temps.

Les conseils de Khaled Saleh et de Frédéric Chardard concernant les aspects numériques ont été pour moi très précieux. Leur aide m'a permis à la fois de comprendre mes propres erreurs et de les corriger. Un grand merci également à Frédéric Lagoutière pour sa disponibilité et ses suggestions lors de ma pré-soutenance.

Enfin, je souhaite exprimer ma reconnaissance à l'équipe administrative de l'Institut Camille Jordan pour son travail qui, réalisé en quelque sorte dans l'ombre, permet aux autres de faire le leur.

Et puis, je n'oublie pas les collègues et amis dont la contribution est plus personnelle mais tout aussi gratifiante. Je pense à l'ensemble des doctorants du laboratoire, d'aujourd'hui et d'antan. Ceux que l'on croise tous les jours ou presque, les co-bureaux, Adriane, Cécilia, François, Evrad, Ariane, Benjamin, Ivan, Simon, Seidon et Jordan. Ils ont eu la force de me supporter tout en gardant toujours le sourire et j'en suis très heureux. Ceux que l'on croise aussi tous les jours, au travail et en dehors, Maxime, Maxime, Nils, Tania, Xiaolin, Sam, Jean-Cyrille, Simon, Yannick. Nos compétences culinaires et sportives se sont définitivement développées pendant ces trois années et lorsque je repense aux soirées amicales inoubliables, j'espère qu'il y en aura bien d'autres. Il y a aussi ceux que l'on croise ou croisait tous les jours, plus ou moins, Benoît, Blanche, Corentin, Mathias, Thomas, François, Agathe, Álvaro, Hugo, Simon, Coline, Quentin, Luigia, Michele, Benoît, Antoine, Marion, Glawdys,... La liste est si longue que j'espère n'avoir blessé personne!

Il y a aussi les amis de plus longue date, Nelson, Philippe, Samuel, Raphaël, Romain, Margaux, et tant d'autres dont les parcours divers permettent de remettre les choses en perspective. Mes amis, vous m'avez apporté le rire et la légèreté, ce bol d'air qui m'aura été si nécessaire tout au long de ces trois ans. J'espère pouvoir un jour vous rendre la pareille.

J'en arrive aux personnes les plus importantes. Celles qui ne participent à toute cette entreprise qu'à distance mais dont le soutien aura été le plus considérable : ma famille. Mes

parents qui m'ont toujours soutenu, depuis le tout début, et qui, je le sais, ne s'arrêteront jamais. Je leur dois beaucoup, à eux autant qu'à mes frères, beau-frère et beaux-parents. Ils écoutent, supportent, réconfortent, motivent et secouent, tout cela à bon escient. Il va sans dire que sans eux, je ne serais pas arrivé à bon port, et je n'aurais peut-être même pas entrepris le voyage.

Le mot de la fin va à Alisée. Je ne saurais jamais te remercier assez pour tout ce que tu m'apportes tous les jours. Tu fais de moi une personne meilleure. Nous avons fait tout ce chemin ensemble et je n'ai pas honte de dire que cette thèse est aussi la tienne. Je vois le chemin se poursuivre à l'horizon.

À tous, merci.

Table des matières

Remerciements	5
Table des figures	11
Liste des tableaux	17
Introduction	19
1. Structure hamiltonienne	19
2. Ondes périodiques	22
3. Problème de Cauchy pour l'équation de Korteweg-de Vries quasi-linéaire	24
4. Notions de stabilité des ondes périodiques	26
5. Critères de stabilité et intégrale d'action	29
6. Modulations à la Whitham	31
7. Expérimentation numérique de la stabilité	37
8. Comportement des ondes périodiques perturbées	39
9. Chocs dispersifs	42
Chapitre 1. Problème de Cauchy pour l'équation de Korteweg-de Vries quasi-linéaire	47
1. Main result	48
2. A priori energy estimates in Sobolev spaces	50
2.1. Conservation of the skew-symmetric structure	50
2.2. Gauge estimates for subprincipal remainders	54
2.3. Weighted norms equivalences	57
3. Existence of a smooth solution	59
3.1. Study of a regularized equation	59
3.2. Convergence to a solution of (qKdV)	62
4. Uniqueness and continuity with respect to the data	65
4.1. Uniqueness and continuity with respect to the data	65
4.2. Concluding remarks	67
Chapitre 2. Approche numérique de la stabilité des ondes périodiques dans les systèmes hamiltoniens	69
1. Équation de profil et famille d'ondes paramétrées	70
2. Intégrale d'action et critères de stabilité	73
2.1. Intégrale d'action	73
2.2. Critère de stabilité modulationnelle	75
2.3. Critère de stabilité orbitale	75
3. Recherche systématique d'ondes périodiques	79
3.1. Méthodologie	79
3.2. Quelques résultats numériques	79
3.3. Discussion sur la précision des résultats	81
4. Approche numérique pour l'évaluation des critères de stabilité	82
4.1. Méthodologie	82
4.2. Deux tests de validation : KdV et NLS	87
5. Plus de résultats numériques	94

5.1.	$N = 1$: équation de Korteweg-de Vries généralisée	94
5.1.1.	Équation de KdV modifiée	95
5.1.2.	KdV généralisée $\gamma = 4$	99
5.2.	$N = 2$: autour du système d'Euler-Korteweg	105
5.2.1.	Non-linéarité de Boussinesq	106
5.2.2.	Non-linéarité des gaz parfaits	109
6.	À propos des résultats numériques	112
6.1.	Estimations d'erreur	112
6.2.	Discussion sur la précision des résultats	115
6.3.	Adaptations de la méthode dans le régime soliton	119
Chapitre 3. Manifestations des ondes périodiques : perturbations et chocs dispersifs		123
1.	Retour sur le système d'ÉDP dispersive	124
1.1.	Résolution des équations de profil	124
2.	Discrétisation du système d'ÉDP par différences finies	125
2.1.	Schéma saute-mouton d'ordre 2 pour (gKdV)	126
2.2.	Extension au cas κ variable	129
3.	Comportement des ondes périodiques perturbées	130
3.1.	Perturbation localisée	130
3.2.	Perturbation co-périodique	134
4.	Chocs dispersifs	139
4.1.	Chocs dispersifs dans les systèmes intégrables : équation de KdV	139
4.1.1.	Solution analytique de l'équation de KdV	140
4.1.2.	Problème de Gurevich-Pitaevskii	141
4.1.3.	Comparaisons numériques	143
4.2.	Non-linéarité non convexe	145
4.3.	Chocs dispersifs des systèmes non-intégrables	148
4.3.1.	À propos des ondes de détente du système de Whitham	148
4.3.2.	Caractérisation de la zone de Whitham	148
4.3.3.	Quelques résultats numériques dans les cas $N = 1$ et $N = 2$	150
5.	À propos des résultats numériques	153
Conclusions et perspectives		155
1.	Problème de Cauchy pour l'équation de qKdV autour d'un profil périodique régulier	155
2.	Analyse du comportement asymptotique du système modulé dans les régimes limites	155
3.	Construction de chocs dispersifs pour des systèmes non intégrables.	156
Annexe A. Co-periodic stability of periodic waves in some Hamiltonian PDEs		159
1.	Introduction	160
2.	Summary of main results	164
3.	Co-periodic, spectral instability	168
3.1.	General setting	168
3.2.	Evans function	170
4.	Co-periodic, orbital stability	176
4.1.	Abstract setting	176
4.2.	An index for co-periodic, orbital stability	178
5.	Examples	182
5.1.	Quasilinear KdV	182
5.2.	Euler-Korteweg	190
5.2.1.	Eulerian coordinates <i>vs</i> mass Lagrangian coordinates	190
5.2.2.	Connexion with quasilinear KdV equations	198

5.2.3. Orbital stability in the Euler–Korteweg system	198
6. Numerical investigation of specific examples	202
6.1. Methodology	202
6.2. A few numerical results	204
6.2.1. Benchmarks	204
6.2.2. More qKdV test cases	207
6.2.3. More EK test cases	210
7. Appendix : Algebraic computations regarding Θ and θ	213
Bibliographie	219

Table des figures

0.1	Schéma des notions de stabilité des ÉDO.	27
0.2	Schéma des notions de stabilité des solutions périodiques d'ÉDP.	35
0.3	Erreur relative en norme L^1 entre les solutions avec et sans perturbation pour l'équation (gKdV) et en fonction du temps	42
0.4	Illustration de la structure d'un choc dispersif.	43
2.1	Exemple de potentiel $\mathscr{W}(v)$ de type KdV.	71
2.2	Exemple de portrait de phase associé au potentiel $\mathscr{W}(v)$ de type KdV.	72
2.3	Exemple de courbe $v \mapsto p(v)$ et de droite de Rayleigh de type KdV.	72
2.4	Exemples de lieux $(\lambda, c) \in \mathbb{R}^2$ associés à l'équation de KdV généralisée.	80
2.5	Représentation du potentiel \mathscr{W} de l'équation de KdV après étude paramétrique.	80
2.6	Exemple d'affichage de tests de stabilité modulationnelle pour un ensemble de paramètres (λ_1, c) .	86
2.7	Résultats de l'étude de stabilité modulationnelle pour l'équation de KdV et pour les paramètres $c \in [1; 10]$, $\lambda \in [-5; 5]$.	87
2.8	Résultats de l'étude de stabilité orbitale pour l'équation de KdV et pour les paramètres $c \in [1; 10]$, $\lambda \in [-5; 5]$.	88
2.9	Spectre du système de Whitham associé à l'équation de KdV en fonction du nombre d'onde normalisé.	88
2.10	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation de KdV.	89
2.11	Erreur relative sur le déterminant de la matrice $\text{Hess}\Theta$ en pourcentage en fonction du nombre d'onde normalisé. Cas de l'équation de KdV pour $c = 60$ et $\lambda = -60$ fixes.	90
2.12	Erreur relative sur le determinant de $\text{Hess}\Theta$ en pourcentage et en fonction du nombre d'onde normalisé. Cas de l'équation de NLS pour $c = -1$ et $\lambda_1 = 2.5$ fixes.	91
2.13	Spectre du système de Whitham associé à l'équation de NLS en fonction de la période des ondes.	91
2.14	Signe de mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation de NLS.	92
2.15	À gauche, lieu des paramètres (λ_1, c) admissibles pour l'équation de NLS. À droite, loi de pression $p(v) = \frac{1}{2v^2}$ et droite de Rayleigh $v \mapsto -c^2v + \lambda_1$, pour $c = -1$ et $\lambda_1 = 2.5$.	93
2.16	Résultats de l'étude de stabilité modulationnelle pour l'équation de NLS et pour les paramètres $c \in [-2; -0.5]$, $\lambda \in [1; 4]$.	93
2.17	Résultats de l'étude de stabilité orbitale pour l'équation de NLS et pour les paramètres $c \in [-2; -0.5]$, $\lambda \in [1; 4]$.	94

2.18	Potentiel \mathscr{W} (bleu) pour l'équation de mKdV dans le cas focalisant avec $c = 50$ et $\lambda = -10$. Le niveau d'énergie μ rouge correspond à des ondes <i>dnoidales</i> , le niveau mauve à des ondes <i>cnoidales</i> .	96
2.19	Spectre du système de Whitham associé à l'équation de mKdV focalisante : exemple 1.	96
2.20	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation de mKdV : exemple 1.	97
2.21	Spectre du système de Whitham associé à l'équation de mKdV focalisante : exemple 2.	97
2.22	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation de mKdV : exemple 2.	98
2.23	Spectre du système de Whitham associé à l'équation de mKdV défocalisante.	98
2.24	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation de mKdV défocalisante.	99
2.25	Spectre du système de Whitham associé à l'équation (gKdV) focalisante $\gamma = 4$: exemple 1.	100
2.26	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation (gKdV) focalisante $\gamma = 4$: exemple 1.	100
2.27	Conditionnements associées à la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé.	101
2.28	Loi $v \mapsto p(v)$ pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante (en bleu) et droite de Rayleigh $v \mapsto cv + \lambda$ (en rouge) dans le cas $c = 10$, $\lambda = 3$.	101
2.29	Spectre du système de Whitham associé à l'équation (gKdV) focalisante $\gamma = 4$: exemple 2.	102
2.30	Spectre du système de Whitham associé à l'équation (gKdV) focalisante $\gamma = 4$: exemple 3.	102
2.31	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation (gKdV) focalisante $\gamma = 4$: exemple 3.	103
2.32	Spectre du système de Whitham associé à l'équation (gKdV) focalisante $\gamma = 4$: exemple 4.	103
2.33	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation (gKdV) focalisante $\gamma = 4$: exemple 4.	104
2.34	Spectre du système de Whitham associé à l'équation (gKdV) focalisante $\gamma = 4$: instabilité.	105
2.35	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation (gKdV) focalisante $\gamma = 4$: instabilité.	106
2.36	Potentiel et non-linéarité associés à l'équation (EK-Boussinesq). Cas où le point centre du p-système est stable.	107
2.37	Spectre du système de Whitham associé à l'équation (EK-Boussinesq) : exemple 1.	108
2.38	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation (EK-Boussinesq) : exemple 1.	108
2.39	Potentiel et non-linéarité associés à l'équation (EK-Boussinesq). Cas où le point centre du p-système est instable.	109
2.40	Spectre du système de Whitham associé à l'équation (EK-Boussinesq) : exemple 2.	109

2.41	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation (EK-Boussinesq) : exemple 2.	110
2.42	Spectre du système de Whitham associé à l'équation (EK-Boussinesq) : exemple 3.	110
2.43	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation (EK-Boussinesq) : exemple 3.	111
2.44	Spectre du système de Whitham associé à l'équation (EK-gaz parfait).	111
2.45	Signe des mineurs principaux de la matrice hessienne de l'action pour l'équation (EK-gaz parfait).	112
2.46	Erreur relative d'intégration calculée a posteriori. Comparaison (KdV) et (gKdV).	113
2.47	Erreur relative d'intégration calculée a posteriori. Comparaison du calcul de Θ et de Ξ .	115
2.48	Exemple d'erreur relative de dérivation de Θ en fonction des différentes discrétisations.	116
2.49	Erreur relative d'intégration calculée a posteriori pour l'équation (gKdV) $\gamma = 4$.	117
2.50	Exemple d'erreur relative de dérivation de Θ en fonction des différentes discrétisations : cas des ondes de grande période.	117
2.51	Zoom sur le spectre du système de Whitham associé à l'équation (gKdV) $\gamma = 4$. Erreur sur le calcul des valeurs propres.	118
2.52	Spectre du système de Whitham associée à l'équation de KdV. Comparatifs des corrections dans le régime soliton.	120
3.1	Profil périodique calculé par méthode RK4 et erreur relative associée pour l'équation de KdV.	125
3.2	Profil périodique calculé par méthode RK4 et erreur relative associée pour l'équation de NLS.	125
3.3	Fonction $f_\varepsilon(\theta)$ pour $\varepsilon > 0$ en bleu, $\varepsilon = 0$ en noir et $\varepsilon < 0$ en rouge.	128
3.4	Évolution temporelle d'une onde périodique solution de l'équation de KdV perturbée localement.	131
3.5	Évolution dans le plan (x, t) des maxima d'une onde périodique solution de l'équation de KdV perturbée localement.	132
3.6	Évolution temporelle d'une onde périodique solution de l'équation (gKdV) perturbée localement.	133
3.7	Évolution dans le plan (x, t) des maxima d'une onde périodique solution de l'équation (gKdV) perturbée localement.	133
3.8	Évolution temporelle d'une onde périodique solution de l'équation (EK-Boussinesq) perturbée localement.	134
3.9	Évolution dans le plan (x, t) des maxima d'une onde périodique solution de l'équation (EK-Boussinesq) perturbée localement.	135
3.10	Illustration d'une perturbation co-périodique.	135
3.11	Erreur relative en norme L^1 entre les solutions avec et sans perturbation pour l'équation de KdV et en fonction du temps	136
3.12	Erreur relative en norme L^1 entre les solutions avec et sans perturbation pour l'équation (gKdV) et en fonction du temps	137

3.13	Erreur relative en norme L^∞ entre les solutions avec et sans perturbation pour l'équation de KdV et en fonction du temps	138
3.14	Erreur relative en norme L^∞ entre les solutions avec et sans perturbation pour l'équation (gKdV) et en fonction du temps	138
3.15	Description de la structure d'un choc dispersif dans le cas d'une dispersion positive $\varepsilon > 0$.	139
3.16	Illustration de la structure d'un choc dispersif dans le cas $\varepsilon < 0$.	140
3.17	Schéma des courbes caractéristiques représentant une détente du système de Whitham associé à une équation de type (KdV).	142
3.18	Évolution spatio-temporelle d'une marche régularisée par l'équation de KdV : choc dispersif.	144
3.19	Comparaisons des solutions de l'équation de KdV et de la solution analytique et modulée fournie par le système de Whitham. Lignes de niveau du choc dispersif.	145
3.20	Évolution spatio-temporelle d'une marche régularisée par l'équation de mKdV : choc dispersif classique.	147
3.21	Onde double <i>kink/choc dispersif</i> de l'équation de mKdV $\varepsilon < 0$. En rouge sont représentées les positions repérées par les vitesses s_k , s_- et s_+ (de gauche à droite).	147
3.22	Onde double <i>choc dispersif de contact/choc dispersif</i> de l'équation de mKdV $\varepsilon > 0$. En rouge sont représentées les positions repérées par les vitesses s_- , s_* et s_+ .	148
3.23	Évolution puis rupture de la formation d'un choc dispersif de l'équation de gKdV $\gamma = 4$ pour $\varepsilon > 0$. En rouge sont représentées les positions repérées par les vitesses s_- et s_+ . En bas à droite, zoom sur le train d'ondes observable au pied de choc.	150
3.24	Évolution spatio-temporelle de chocs dispersifs et de raréfactions de la première coordonnée v du système (EK) avec $p(v) = \frac{1}{2v}$ et $\kappa = 1$.	152
3.25	Évolution spatio-temporelle de chocs dispersifs et de raréfactions de la seconde coordonnée u du système (EK) avec $p(v) = \frac{1}{2v}$ et $\kappa = 1$.	153
A.1	Quadratic nonlinearity, associated potential and phase portrait.	184
A.2	Shallow-water type nonlinearity, associated potential and phase portrait.	185
A.3	Left : condition number of $\text{Hess}\theta$ as a function of the period Υ for KdV, with $c = 60$, $\lambda = -60$ kept fixed. Right : relative error on $\det \text{Hess}\theta$. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.005$.	204
A.4	Upper left : $m_1 = \theta_{\mu\mu}$; upper right : $m_2 = \theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2$; and lower left : $m_3 = \det \text{Hess}\theta$, all of them as functions of the period Υ for KdV with $c = 60$, $\lambda = -60$ kept fixed. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.005$.	205
A.5	Left : condition number of $\text{Hess}\Theta$ as a function of the period for NLS, with $j = 1$, $\sigma = 0$, $\mu = -2.5$ kept fixed. Right : relative error on $\det \text{Hess}\Theta$. Finite difference step size : $\Delta\nu = 10^{-5}$.	206
A.6	The four principal minors : $M_1 = \Theta_{\lambda\lambda}$ (upper left); $M_2 = \Theta_{\mu\mu}\Theta_{\lambda\lambda} - \Theta_{\lambda\mu}^2$ (upper right); M_3 (lower left); and $M_4 = \det(\text{Hess}\Theta)$ (lower right), as a function of the period for NLS case, with $j = 1$, $\sigma = 0$, $\mu = -2.5$ kept fixed. Finite difference step size : $\Delta\nu = 10^{-5}$.	206
A.7	$\Theta_{\mu\mu}$ as a function of the period with the same data as in Figure A.6.	207

- A.8 Condition number of $\text{Hess}\theta$ as a function of the period for focusing (mKdV), that is $\gamma = 3$ and $e = 1$, with $c = 1000$ and $\lambda = -500$ kept fixed. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.05$. 208
- A.9 Upper left : $m_1 = \theta_{\mu\mu}$; upper right : $m_2 = \theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2$; and lower left : $m_3 = \det \text{Hess}\theta$, as a function of the period for focusing (mKdV), with the same data as in Figure A.8. 208
- A.10 Condition number of $\text{Hess}\theta$ as a function of the period for defocusing (mKdV), that is $\gamma = 3$ and $e = -1$, with $c = -100$ and $\lambda = -60$ kept fixed. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.005$. 209
- A.11 Upper left : $m_1 = \theta_{\mu\mu}$; upper right : $m_2 = \theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2$; and lower left : $m_3 = \det \text{Hess}\theta$, as a function of the period for defocusing (mKdV), with the same data as in Figure A.10. 209
- A.12 Condition number of $\text{Hess}\theta$ as a function of the period for (gKdV) with $\gamma = 4$ and $e = 1$, and $c = 1000$, $\lambda = -500$ kept fixed. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.005$. 210
- A.13 Upper left : $m_1 = \theta_{\mu\mu}$; upper right : $m_2 = \theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2$; and lower left : $m_3 = \det \text{Hess}\theta$, as a function of the period for (gKdV) with $\gamma = 4$ and $e = 1$, with the same data as in Figure A.12. 210
- A.14 Left : condition number of $\text{Hess}\Theta$ as a function of the period for EKL with Boussinesq pressure law with $\gamma = 2$, $j = -0.1$, $\sigma = 0$, $\mu = -2$ kept fixed. Right : $\Theta_{\mu\mu}$. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.5 \cdot 10^{-4}$. 211
- A.15 The four principal minors : $M_1 = \Theta_{\lambda\lambda}$ (upper left); $M_2 = \Theta_{\mu\mu}\Theta_{\lambda\lambda} - \Theta_{\lambda\mu}^2$ (upper right); M_3 (lower left); and $M_4 = \det(\text{Hess}\Theta)$ (lower right), for EKL with Boussinesq pressure law with $\gamma = 2$ and the same data as on Figure A.14. 212
- A.16 Left : condition number of $\text{Hess}\Theta$ as a function of the period for EK with the perfect gas pressure law, with $j = -1$, $\sigma = 0$, $\mu = -2.5$ kept fixed. Right : $\Theta_{\mu\mu}$. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.5 \cdot 10^{-4}$. 212
- A.17 The four principal minors : $M_1 = \Theta_{\lambda\lambda}$ (upper left); $M_2 = \Theta_{\mu\mu}\Theta_{\lambda\lambda} - \Theta_{\lambda\mu}^2$ (upper right); M_3 (lower left); and $M_4 = \det(\text{Hess}\Theta)$ (lower right), for EKL with the perfect gas pressure law and the same data as in Figure A.16. 213

Liste des tableaux

2.1	Notations des paramètres	76
2.2	Variations du potentiel \mathscr{W} .	82
2.3	État de l'art des résultats de stabilité pour (gKdV).	95
2.4	Résultats de stabilité complétés pour l'équation (gKdV).	106
A.1	Variations of potential	186
A.2	Notation for wave parameters	192
A.3	Parameters in the reduced profile equation	202
A.4	Energy level and potential in the reduced profile equation	202
A.5	Possible values of signs of minors and negative signatures regarding \mathbf{C}_L	216
A.6	Possible values of signs of minors and negative signatures regarding \mathbf{C}_E	217

Introduction

Les ondes font partie intégrante de notre vie de tous les jours. Autour de nous, et sans que l'on y prête spécialement attention, le son, la lumière, les cercles à la surface d'un lac sont autant de manifestations que l'on ne s'étonne plus d'observer. Même si ces phénomènes de propagation nous semblent très communs, les modèles qui nous permettent de les étudier suscitent de nombreuses questions ouvertes. Les équations aux dérivées partielles *hamiltoniennes* représentent une grande classe de modèles qui permet d'étudier ces phénomènes propagatifs sans dissipation. On retrouve des applications de ces modèles dans de nombreux domaines des sciences physiques, en particulier en optique non-linéaire et en mécanique des fluides, dans lesquels les non-linéarités et la dispersion jouent un rôle important.

Dans cette thèse, on s'intéresse plus particulièrement aux ondes progressives périodiques à une dimension d'espace et notre principale motivation est l'étude des *propriétés de stabilité* de celles-ci. Cette entreprise vaste et complexe nous a menés à la fois à des problèmes *d'existence et d'unicité* de solutions autour de profils périodiques et vers le développement d'une *méthode numérique* de caractérisation de stabilité. Ces questions de stabilité sont également très liées à la représentation d'ondes modulées à la *Whitham*. Les équations modulées sont à la base de l'étude de phénomènes complexes comme la régularisation par la dispersion des ondes de choc que l'on appelle *chocs dispersifs*.

Cette introduction décrit le contexte et les motivations de chacune des problématiques abordées dans cette thèse et fournit un résumé des différents résultats obtenus.

1. Structure hamiltonienne

Commençons par décrire le formalisme hamiltonien standard pour les équations différentielles ordinaires (ÉDO) sur \mathbb{R}^N . On munit \mathbb{R}^N d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on se donne J^{-1} un endomorphisme antisymétrique et inversible. Ceci permet de définir une forme bilinéaire antisymétrique et non-dégénérée $\omega(x, y) = \langle x, J^{-1}y \rangle$ appelée forme symplectique.

Pour toute fonction h différentiable, on peut associer à la différentielle dh le gradient ∇h tel que $dh(x)(y) = \langle \nabla h(x), y \rangle$. De la même manière, on peut associer à travers la forme symplectique, le *gradient symplectique* $J(\nabla h)$ tel que $dh(x)(y) = \omega(J(\nabla h(x)), y)$ quels que soient $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Le système d'équations différentielles

$$(1) \quad v_t = J(\nabla h(v))$$

est alors tel que la fonction h est intégrale première, par définition constante le long des solutions, que l'on appelle *hamiltonien*.

On peut aussi définir une application bilinéaire $\{ \cdot, \cdot \}$ sur l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ par

$$\{h, g\} = \omega(J(\nabla h), J(\nabla g)) = \langle \nabla h, J(\nabla g) \rangle .$$

Cette application est antisymétrique du fait de l'antisymétrie de ω , vérifie l'identité de Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0,$$

et la règle de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g.$$

On l'appelle crochet de Poisson. Ce crochet est tel que si $\{h, g\} = 0$ alors la fonction g est une intégrale première de (1).

Certaines équations aux dérivées partielles (ÉDP) d'évolution peuvent être munies d'une structure dite hamiltonienne, qui généralise celle des ÉDO du type (1). Une telle structure repose, d'une part sur une fonctionnelle \mathcal{H} opérant sur les fonctions \mathcal{C}^∞ de la variable spatiale x , et d'autre part sur un opérateur différentiel \mathcal{J} , antisymétrique pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ avec $\Omega = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}/\mathbb{Z} selon le problème considéré. La fonctionnelle \mathcal{H} est définie sur un ensemble de fonctions \mathbf{U} de x satisfaisant des propriétés suffisantes de régularité, et de décroissance lorsque $|x| \rightarrow \infty$ au moyen d'une densité

$$\mathcal{H}[\mathbf{U}] = \int H[\mathbf{U}] dx,$$

où l'inconnue \mathbf{U} prend ses valeurs dans \mathbb{R}^N et la notation $[\cdot]$ signifie que le hamiltonien \mathcal{H} depend non seulement de \mathbf{U} , mais aussi de ses dérivées spatiales $\mathbf{U}_x, \mathbf{U}_{xx}, \dots$. Le gradient variationnel $\delta\mathcal{H}$ est défini pour \mathbf{U} et \mathbf{V} suffisamment régulières par

$$\left(\frac{d\mathcal{H}[\mathbf{U} + s\mathbf{V}]}{ds} \right)_{s=0} = \int \delta\mathcal{H}[\mathbf{U}]\mathbf{V} dx.$$

Si \mathcal{J} est un opérateur différentiel à coefficients constants antisymétrique, on peut définir un crochet de Poisson entre fonctionnelles [102] par

$$\{\mathcal{R}, \mathcal{H}\} = \int \delta\mathcal{R}[\mathbf{U}] \cdot \mathcal{J}(\delta\mathcal{H}[\mathbf{U}]) dx.$$

Dans ce qui suit, on s'intéresse donc à des ÉDP *hamiltoniennes* qui sont de la forme

$$(2) \quad \partial_t \mathbf{U} = \mathcal{J}(\delta\mathcal{H}[\mathbf{U}]).$$

Le crochet de Poisson est toujours tel que si $\{\mathcal{H}, \mathcal{R}\} = 0$ alors la fonctionnelle \mathcal{R} est conservée le long des solutions régulières de (2). C'est en particulier le cas de \mathcal{H} puisque $\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$. On peut aussi simplement le vérifier par le calcul

$$\frac{d}{dt} \int \mathcal{H}[\mathbf{U}] dx = \int \delta\mathcal{H}[\mathbf{U}] \cdot \partial_t \mathbf{U} dx = \int \delta\mathcal{H}[\mathbf{U}] \cdot \mathcal{J}(\delta\mathcal{H}[\mathbf{U}]) dx = 0.$$

Considérons par exemple l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$(NLS) \quad i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\partial_x^2 \psi = \psi g(|\psi|^2),$$

qui décrit les ondes courtes à la surface d'un fluide parfait. La formulation hamiltonienne standard de (NLS) correspond à $\mathbf{U} = (\text{Re}(\psi), \text{Im}(\psi))^T$,

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}[\mathbf{U}] = \frac{1}{2}|\psi_x|^2 + F(|\psi|^2),$$

où $F'(\rho) = g(\rho)$. Cette formulation n'est pas celle que l'on choisira d'exploiter dans la suite, car on va privilégier les structures hamiltoniennes pour lesquelles \mathcal{J} est un opérateur différentiel d'ordre 1.

On suppose dans tout ce qui suit que l'opérateur \mathcal{J} s'écrit sous la forme

$$(3) \quad \mathcal{J} = \mathbf{B}\partial_x,$$

où \mathbf{B} est une matrice inversible et symétrique.

En dérivant sous le signe intégral et en intégrant par parties, on trouve que la composante d'indice α du gradient variationnel $\delta\mathcal{H}$ s'exprime

$$(\delta\mathcal{H}[\mathbf{U}])_\alpha = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial U_\alpha}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) - D_x \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial U_{\alpha,x}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) \right),$$

où D_x correspond à la dérivée totale par rapport à x , de sorte qu'avec la convention de sommation des indices répétés d'Einstein

$$D_x \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial U_{\alpha,x}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) \right) = \frac{\partial^2\mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)}{\partial U_\beta \partial U_{\alpha,x}} U_{\beta,x} + \frac{\partial^2\mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)}{\partial U_{\beta,x} \partial U_{\alpha,x}} U_{\beta,xx}.$$

En raison des applications visées, on supposera également que le hamiltonien \mathcal{H} se décompose sous la forme

$$(4) \quad \mathcal{H}[\mathbf{U}] = \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) = \mathcal{I}(v, u) + \mathcal{E}(v, v_x), \text{ avec } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix},$$

où $v \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{N-1}$. et que \mathcal{E} se décompose à son tour comme

$$(5) \quad \mathcal{E}(v, v_x) = f(v) + \frac{1}{2}\kappa(v)v_x^2,$$

où κ est une fonction régulière et à valeurs strictement positives et \mathcal{I} est une fonction strictement convexe de la variable u . Ces formes particulières sont motivées par les applications décrites plus loin.

Par ailleurs, certaines invariances de (2) sont associées à des lois de conservation satisfaites par les solutions régulières. La loi de conservation fondamentale pour la suite est celle du moment \mathcal{Q}

$$(6) \quad \partial_t \mathcal{Q}(\mathbf{U}) = \partial_x(\mathcal{I}[\mathbf{U}]),$$

avec

$$\mathcal{Q}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{U}, \text{ et } \mathcal{I}[\mathbf{U}] = \mathbf{U} \cdot \delta\mathcal{H}[\mathbf{U}] + \mathbf{L}\mathcal{H}[\mathbf{U}].$$

L'opérateur \mathbf{L} correspond formellement à une transformation de Legendre (sans changement de variable)

$$\mathbf{L}\mathcal{H}[\mathbf{U}] = U_{\alpha,x} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial U_{\alpha,x}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) - \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x).$$

D'après la définition du moment \mathcal{Q} , parfois appelé impulsion, on a

$$(7) \quad \mathcal{I}(\delta\mathcal{Q}(\mathbf{U})) = \partial_x \mathbf{U}.$$

Ceci est lié à l'invariance par translation spatiale du système (2). En effet, le hamiltonien \mathcal{H} ne dépend pas directement de la variable d'espace x , de sorte que pour toute solution \mathbf{U} régulière de (2), pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \mathbf{U}(t, x + x_0)$ est également solution. On montre [12, p. 58] que (7) fait le lien entre l'invariance par translation en x de (2) et la loi de conservation (6).

De manière générale, on se concentrera sur le cas scalaire $N = 1$ ou le cas de systèmes à deux équations $N = 2$. Le cas scalaire correspond à différentes généralisations de l'équation de KdV, de la forme

$$\partial_t v = \mathcal{I}(\delta\mathcal{H}[v]), \quad \mathcal{H}[v] = \frac{1}{2}\kappa(v)v_x^2 + f(v),$$

et que l'on développe sous la forme

$$(qKdV) \quad \partial_t v + \partial_x(p(v)) = -\partial_x \left(\frac{1}{2}\kappa'(v)(v_x)^2 - \kappa(v)v_{xx} \right),$$

où $\mathbf{B} = 1$, $\mathcal{I}(v) = 0$, $p(v) = -f'(v)$ et $\mathcal{Q}(v) = \frac{1}{2}v^2$. L'équation (qKdV) est une version *quasi-linéaire*, par contraste avec le cas particulier $\kappa = 1$ correspondant à l'équation de KdV généralisée

$$(8) \quad (gKdV) \quad \partial_t v + \partial_x(p(v)) = -\partial_x^3 v.$$

pour laquelle on considère bien souvent des non-linéarités du type $p(v) = \pm v^\gamma$. L'équation de KdV

$$\text{(KdV)} \quad v_t + vv_x + v_{xxx} = 0$$

correspond alors au cas particulier $p(v) = \frac{1}{2}v^2$.

Dans le cas $N = 2$, on considèrera le système d'Euler-Korteweg, dont l'écriture en coordonnées eulériennes est

$$(9) \quad \text{(EKE)} \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x(\delta \mathcal{E}(\rho, \rho_x)) = 0, \end{cases}$$

et qui correspond à

$$\mathbf{B} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}(\rho, u) = -\rho u, \quad \mathcal{I}(\rho, u) = \frac{1}{2}\rho u^2, \quad \mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \mathcal{E}(\rho, \rho_x).$$

Ce système admet une formulation formellement équivalente en coordonnées lagrangiennes de masse de la forme

$$(10) \quad \text{(EKL)} \quad \begin{cases} \partial_t v = \partial_y u, \\ \partial_t u = \partial_y(\delta \mathcal{E}(v, v_y)), \end{cases}$$

où $dy = \rho dx - \rho u dt$, $\mathcal{E}(v, v_y) = \mathcal{E}(\rho, \rho_x)/\rho$ et $v = 1/\rho$. Ce système fait également partie de la catégorie abstraite décrite précédemment avec

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}(v, u) = vu, \quad \mathcal{I}(v, u) = \frac{1}{2}u^2, \quad \mathcal{H}(v, u, v_y) = \frac{1}{2}u^2 + \mathcal{E}(v, v_y).$$

Les deux énergies qui interviennent dans ces formulations s'écrivent

$$(11) \quad \mathcal{E} = F(\rho) + \frac{1}{2}\mathcal{K}(\rho)\rho_x^2, \quad \mathcal{E} = f(v) + \frac{1}{2}\kappa(v)v_y^2,$$

où $\mathcal{E} = v \mathcal{E}$, $F = \rho f$ et $\kappa = \rho^5 \mathcal{K}$. Pour une description plus détaillée de cette correspondance, le lecteur est invité à se référer à [22]. Ces deux écritures présentent l'avantage de modéliser de nombreux problèmes physiques comme les superfluides, ou encore l'optique non-linéaire. Dans la suite, on s'intéressera particulièrement à la version lagrangienne (10) sans toutefois totalement oublier son correspondant eulérien (9).

L'équation de NLS mentionnée ci-dessus apparaît, dans sa formulation *fluide*, comme un cas particulier du système d'Euler-Korteweg en coordonnées eulériennes via la transformation de Madelung qui s'écrit

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\varphi}, \quad \varphi_x = u,$$

avec $\mathcal{K}(\rho) = \frac{1}{4\rho}$. Le passage aux coordonnées lagrangiennes de masse détermine les choix de non-linéarités

$$p(v) = \frac{1}{2v^2}, \quad \text{avec } p = -f' \text{ et } \kappa(v) = \frac{1}{4v^4}.$$

2. Ondes périodiques

Les ÉDP hamiltoniennes admettent « génériquement » des familles d'ondes progressives périodiques en espace. Dans le cas qui nous intéresse, une onde progressive qui est périodique en espace l'est également en temps, tant que sa vitesse de déplacement est non nulle. Dans la suite, on désignera simplement par *ondes périodiques* les ondes progressives périodiques en espace. Les familles d'ondes périodiques des EDP hamiltoniennes vont des ondes de faible amplitude autour d'états stationnaires aux ondes de plus en plus grande période dont la limite dans l'espace des phases est une boucle homocline. Les ondes représentées par ces boucles homoclines sont connues depuis le XIX^e siècle comme

des ondes solitaires. Celles-ci ont fait l'objet de recherches très actives, notamment pour la fameuse équation de Korteweg-de Vries. Pour cette équation par exemple, l'étude des familles d'ondes périodiques, plus complexe, remonte à des travaux réalisés à la fin des années 1960 par Gardner, Green, Kruskal & Miura [58].

L'équation de KdV a la propriété particulière d'être *complètement intégrable*. Ceci permet de construire analytiquement des ondes périodiques. L'idée est ici d'étudier les ondes périodiques solutions d'équations hamiltoniennes qui ne sont pas nécessairement intégrables. Par définition, un système est dit complètement intégrable s'il peut être ramené par des transformations adéquates à la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants découplées. C'est par exemple le cas des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants sur \mathbb{R}^N via les transformées de Fourier directe et inverse. Dans le cas de KdV les transformations adéquates, dites de « scattering » directe et inverse, ont été introduites par Gardner, Green, Kruskal & Miura [59] et sont décrites en détails dans [2] et [49].

On souhaite faire abstraction de la propriété d'intégrabilité afin d'obtenir des informations sur des systèmes plus complexes et/ou plus proches de la réalité. Ce manuscrit s'inscrit dans un ensemble de travaux concernant l'étude des propriétés des ces solutions périodiques et initiés, entre autres, par Benzoni-Gavage et Rodrigues [14, 15, 16, 21, 22]. Ces travaux sont en partie à l'origine du projet ANR BoND – Boundaries, Numerics and Dispersion – qui a financé l'ensemble des recherches présentées ici.

On s'intéresse à des solutions sous la forme d'onde progressive de vitesse c

$$\mathbf{U}(t, x) = \underline{\mathbf{U}}(x - ct),$$

dont le profil $\underline{\mathbf{U}}$ doit alors satisfaire l'équation différentielle ordinaire (du fait de la relation (7))

$$\partial_x(\delta(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}]) = 0.$$

Ceci implique qu'il existe $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$(12) \quad \delta(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}] = -\boldsymbol{\lambda}.$$

Remarque 0.1. La constante d'intégration $\boldsymbol{\lambda}$ introduite ici avec un signe moins apparaît avec un signe plus dans l'article reproduit en annexe A, eq. (105). Cette différence de convention ne change fondamentalement aucun résultat.

L'équation (12) est une équation d'Euler-Lagrange en x associée au lagrangien \mathcal{L} défini par

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x; \boldsymbol{\lambda}, c) = \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) + c\mathcal{Q}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{U}.$$

Par conséquent, elle admet comme intégrale première la transformée de Legendre de \mathcal{L}

$$(13) \quad \mathbb{L}\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x; \boldsymbol{\lambda}, c) = \mu.$$

L'équation (13) peut également se réécrire (avec la convention de sommation d'Einstein)

$$\mathbb{L}\mathcal{L}[\mathbf{U}] = \mathcal{S}[\mathbf{U}] + c\mathcal{Q}(\mathbf{U}) = U_{\alpha,x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha,x}}[\mathbf{U}] - \mathcal{H}[\mathbf{U}] - c\mathcal{Q}(\mathbf{U}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{U} = \mu.$$

Les paramètres $\boldsymbol{\lambda}$ et μ sont des constantes d'intégration. Les composantes de $\boldsymbol{\lambda}$ jouent le rôle de multiplicateurs de Lagrange et μ représente un niveau d'énergie associé à l'énergie conservée $\mathbb{L}\mathcal{L}$. À partir des définitions du hamiltonien \mathcal{H} et du moment \mathcal{Q} , (12) s'écrit en notant $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_v, \lambda_u)^T$

$$(14) \quad \begin{cases} \partial_v \mathcal{I}(v, \underline{u}) + \partial_v \mathcal{E}(v, \underline{v}_x) - \mathbb{D}_x \left(\frac{\partial \mathcal{E}(v, \underline{v}_x)}{\partial v_x} \right) + c\partial_v \mathcal{Q}(v, \underline{u}) = -\lambda_v, \\ \partial_u \mathcal{I}(v, \underline{u}) + c\partial_u \mathcal{Q}(v, \underline{u}) = -\lambda_u. \end{cases}$$

Grâce à l'hypothèse de stricte convexité de \mathcal{I} selon la variable u , on réécrit la seconde équation de (14) sous la forme

$$T(\underline{v})\underline{u} + \partial_u \mathcal{I}(\underline{v}, 0) + cb\underline{v} = -\lambda_u, \quad T(\underline{v}) = \frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial u^2} > 0, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \pm 1.$$

en faisant l'hypothèse que T ne dépend que de la variable \underline{v} , ce qui est vrai pour les équations (gKdV), (EKE) et (EKL) qui nous intéressent. Ceci permet d'exprimer

$$\underline{u} = \tilde{u}(v; c, \lambda_u) = -T(\underline{v})^{-1} (\partial_u \mathcal{I}(\underline{v}, 0) + cb\underline{v} + \lambda_u).$$

Finalement, (13) se réduit à une ÉDO portant sur la première composante \underline{v} du profil $\underline{\mathbf{U}}$

$$\frac{1}{2}\kappa(\underline{v})(\underline{v}_x)^2 + \mathcal{W}(\underline{v}; c, \boldsymbol{\lambda}) = \mu.$$

Dans cette équation de profil, la fonction

$$v \mapsto \mathcal{W}(v; c, \boldsymbol{\lambda}) = -f(v) - \mathcal{I}(v, \tilde{u}(v)) - c\mathcal{Q}(v, \tilde{u}(v)) - \boldsymbol{\lambda} \cdot (v, \tilde{u}(v))^t,$$

joue le rôle d'un potentiel au sens physique, au même titre que celui que l'on rencontre lors de l'étude de la position d'une masse retenue par un ressort. Ce sont donc les variations de ce potentiel \mathcal{W} qui permettent de déterminer, via l'étude du portrait de phase, toute une gamme d'ondes progressives périodiques correspondant à des cycles à l'intérieur de boucles homoclines. Les profils de ces ondes sont caractérisés par au plus $N + 2$ paramètres, la vitesse de déplacement c ainsi que les constantes d'intégration $(\mu, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{N+1}$. En résumé, les ondes progressives périodiques d'un système hamiltonien à N équations de la forme (2), (4), (5), constituent généralement des familles à $N + 2$ paramètres. On notera dans la suite Ξ la période associée au profil $\underline{\mathbf{U}}$. La description précise du portrait de phase en fonction des propriétés de \mathcal{W} (et donc en fait de \mathcal{H}) sera donnée au chapitre 2, section 1, dans le second chapitre de ce manuscrit.

3. Problème de Cauchy pour l'équation de Korteweg-de Vries quasi-linéaire

Comme bien souvent quand il s'agit d'équations aux dérivées partielles, le problème de l'existence, de l'unicité et de la continuité des solutions par rapport aux données initiales est difficile et les réponses sont spécifiques aux non-linéarités considérées. Le système d'Euler-Korteweg a été étudié par Benzoni-Gavage, Danchin & Descombes [15, 16]. Dans cette thèse, on étudie une équation scalaire, l'équation de Korteweg-de Vries quasi-linéaire

$$(\text{qKdV}) \quad \partial_t v + \partial_x(p(v)) + \partial_x \left(\sqrt{\kappa(v)} \partial_x (\sqrt{\kappa(v)} \partial_x v) \right) = 0,$$

qui a la forme particulière (2), (3), (4), (5) avec $\mathbf{B} = 1$, $\mathcal{I}(v) = 0$ et $\mathcal{Q}(v) = \frac{1}{2}v^2$.

L'équation de Korteweg-de Vries et différentes généralisations ont fait l'objet de nombreux travaux depuis cinquante ans. Pour l'équation de KdV $\kappa = cste$ et $p(v) = \frac{1}{2}v^2$, Bona & Smith [24] et Kato [86] ont prouvé l'existence locale dans les espaces de Sobolev H^s pour $s > 3/2$ ainsi que l'existence globale pour $s \geq 2$. Puis, Bourgain [29] réduit les seuils d'existence locale et globale à $s \geq 0$. Kenig, Ponce & Vega [88, 87] démontrent l'existence locale pour $s > 3/4$ puis pour $s > -3/4$ et enfin Christ, Colliander & Tao [37] prouvent à la fois l'existence locale et globale pour $s > -3/4$.

Concernant les différentes généralisations de l'équation de KdV (gKdV), les travaux de Kenig, Ponce & Vega [89] traitent à la fois l'existence locale et globale. L'équation de KdV modifiée (mKdV) est traitée par Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka & Tao [38].

La version quasi-linéaire sur laquelle on se concentre ici correspond à la généralisation la plus naturelle d'une équation hamiltonienne abstraite. Elle représente le prototype d'une équation scalaire possédant assez de structure pour admettre une famille d'ondes

périodiques comme solutions sans faire nécessairement partie de la catégorie des équations complètement intégrables. À notre connaissance, les seuls résultats sur le problème de Cauchy concernent une version non-linéaire a priori plus générale

$$v_t + f(v_{xxx}, v_{xx}, v_x, v) = 0,$$

et étudiée par Craig, Kappeler, & Strauss dans [40] et plus récemment par Linares, Ponce, & Smith dans [93]. Néanmoins, leurs résultats ont recours à une hypothèse de monotonie de la non-linéarité $\partial_{v_{xx}} f(v_{xxx}, v_{xx}, v_x, v) \leq 0$, qui reviendrait dans notre cas à considérer $\partial_x \kappa(v) \leq 0$. Sans information a priori sur la monotonie de v , cela reviendrait pour nous à supposer $\kappa = cste$.

Notre version inclut les généralisations semi-linéaires classiques gKdV en choisissant $\kappa = 1$ et p polynomiale. En particulier, $p(v) = \frac{1}{2}v^2$ correspond à l'équation de KdV tandis que $p(v) = \frac{1}{3}v^3$ correspond à l'équation de KdV dite modifiée (mKdV). Ces deux exemples sont célèbres pour leur appartenance à la catégorie des équations complètement intégrables [59, 98], ce qui n'est a priori pas le cas pour des non-linéarités plus générales. On peut néanmoins noter qu'il existe un exemple de cas κ non constant pour lequel (qKdV) est complètement intégrable, plus précisément $\kappa(v) = \frac{\varepsilon^2}{12}(v+a)^{-3}$, avec $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et $p(v) = \frac{v^2}{2}$. Cette propriété a été mise en évidence par Dubrovin [48].

Concernant (qKdV), on prouve dans le premier chapitre de ce manuscrit l'existence et l'unicité d'une solution dans des espaces de Sobolev d'indice suffisamment élevé, ainsi que la continuité de cette solution vis-à-vis de la donnée initiale. Ce résultat est obtenu en grande partie grâce à l'utilisation astucieuse de *jauges*. Cette technique introduite par Lim & Ponce [92] a été développée par Kenig, Ponce & Vega [90], puis par Benzoni-Gavage, Danchin & Descombes [15, 16]. Elle consiste à tirer profit de propriétés de structure de l'équation, en particulier l'antisymétrie du terme dominant, afin d'établir des estimations a priori. La technique de jauge intervient principalement dans le but de contrôler les termes sous-principaux. Le théorème qui sera démontré dans le premier chapitre de ce manuscrit s'énonce ainsi

Théorème 0.1. *Si $p = -f' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^{k+1} sur l'intervalle ouvert I avec $k \geq 4$, et si $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est de classe \mathcal{C}^{k+2} , alors pour tout $v_0 \in H^k(\mathbb{R})$, l'image de v_0 étant incluse dans l'intervalle $J \subset\subset I$, il existe un temps $T > 0$ et un unique*

$$v \in \mathcal{C}(0, T; H^k(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H^{k-3}(\mathbb{R}))$$

solution de (qKdV) avec pour donnée initiale v_0 . De plus, l'application $v_0 \mapsto v$ est continue de $H^k(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}(0, T; H^k(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H^{k-3}(\mathbb{R}))$.

La preuve de ce théorème présentée dans le premier chapitre de ce manuscrit ne tire parti que de la structure de l'équation qKdV et n'utilise aucune estimation de dispersion. Rien ne nous empêche de considérer le même problème posé sur le tore $\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}$ pour n'importe quelle période $\Xi > 0$. Une preuve totalement similaire fournirait alors le même résultat d'existence.

De plus, même si notre théorème est vérifié pour des indices entiers $k \geq 4$, on pourra sans nul doute étendre celui-ci à des indices non-entiers en relâchant la contrainte $k > 3 + 1/2$.

Ce théorème d'existence locale représente la première étape pour l'établissement d'un résultat d'existence de solution avec une condition initiale qui serait une perturbation localisée d'une fonction de référence régulière, bornée et dont les dérivées seraient bornées. Le choix de la fonction de référence comme un profil périodique serait alors adapté aux études de stabilité non-linéaire. Il est apparu que la technique de jauge déployée n'est pas adaptée à ce type de problématique. Les fonctions définissant les jauges sont plus difficiles à construire et ne dépendent plus que de la solution mais aussi du profil de référence. Ces

difficultés sont encore accrues lorsque ces deux solutions ont des propriétés de localisation différentes. La propriété de périodicité, utilisée telle que dans [109], devrait rendre possible le calcul de jauges adaptées et faciliter les estimations qu’elles soulèvent.

4. Notions de stabilité des ondes périodiques

D’un point de vue plus physique, le plus important est certainement la stabilité des solutions. La continuité par rapport à la donnée initiale sur un intervalle de temps fini fixé comme établie dans le Théorème 0.1 peut être pensée comme un résultat de stabilité. Il s’agit de la stabilité au sens d’Hadamard, celle qui assure qu’une solution pourra être effectivement physiquement observée au moins sur un temps court. Par la suite on s’intéressera plutôt à la stabilité au sens de Lyapunov qui assure que la solution pourra être observée sur un temps infini. Les solutions stables au sens de Lyapunov ont une chance de jouer un rôle particulier dans la dynamique en temps long. Les *propriétés de stabilité* des ondes périodiques sont l’une des principales motivations des travaux entrepris au cours de cette thèse. En comparaison, la théorie de la stabilité des ondes périodiques est beaucoup moins développée que celle des ondes solitaires, dont l’étude fut entamée par Boussinesq en 1872 [30]. Des avancées majeures ont été obtenues récemment concernant les ondes périodiques d’ÉDP dissipatives. Ces résultats concernent les systèmes de réaction-diffusion [46] et les systèmes de loi de conservation et visqueux [101, 78]. Pour les ÉDP dispersives, en l’absence de dissipation, on pense notamment aux travaux de Zumbrun, Kapitula, Bronski & Johnson [80, 77, 32, 33] et aux derniers développements obtenus par Benzoni-Gavage, Noble & Rodrigues [21, 22], qui sont à l’origine de cette thèse.

Comment définir la stabilité d’une onde périodique ? Prenons déjà le cas beaucoup plus simple d’une solution stationnaire d’équation différentielle ordinaire (ÉDO)

$$\frac{dv}{dt} = f(t, v),$$

avec $f(\cdot, 0) = 0$. Pour définir la stabilité de l’état d’équilibre $v = 0$ on a plusieurs possibilités.

Une façon naturelle de définir la stabilité d’un équilibre est de demander que pour n’importe quel voisinage \mathcal{V} de l’équilibre, il existe un voisinage \mathcal{V}_0 portant sur la donnée initiale tel que la solution $v(t)$ associée à $v_0 \in \mathcal{V}_0$ appartienne à \mathcal{V} pour tout $t \geq 0$. On parle alors parfois de stabilité *neutre* ou *bornée*. Si on demande de plus que pour une donnée initiale dans un voisinage $\mathcal{V}'_0 \subset \mathcal{V}_0$, la solution associée tende vers l’équilibre quand $t \rightarrow \infty$, on parle de stabilité *asymptotique*.

Quand le problème que l’on considère est non-linéaire, on parle de *stabilité non-linéaire* (neutre ou asymptotique) tandis que l’on réserve le terme *stabilité linéaire* (neutre ou asymptotique) pour désigner cette même propriété lorsqu’elle porte sur l’équation linéarisée

$$\frac{dv}{dt} = Df(t, 0)v.$$

Une dernière notion, plus algébrique, est celle de la *stabilité spectrale*. On parle de *stabilité spectrale neutre* si le spectre de l’opérateur linéarisé autour de l’équilibre $v = 0$ est inclus dans le demi-plan gauche fermé du plan complexe. On parle de *stabilité spectrale stricte* lorsque cette inclusion a lieu dans le demi-plan gauche ouvert.

Toutes ces notions de stabilité ne sont pas indépendantes et le schéma 0.1 illustre les implications reliant chacune d’entre elles dans le cas des ÉDO en dimension finie. On démontre également que la stabilité linéaire neutre est équivalente à la stabilité spectrale

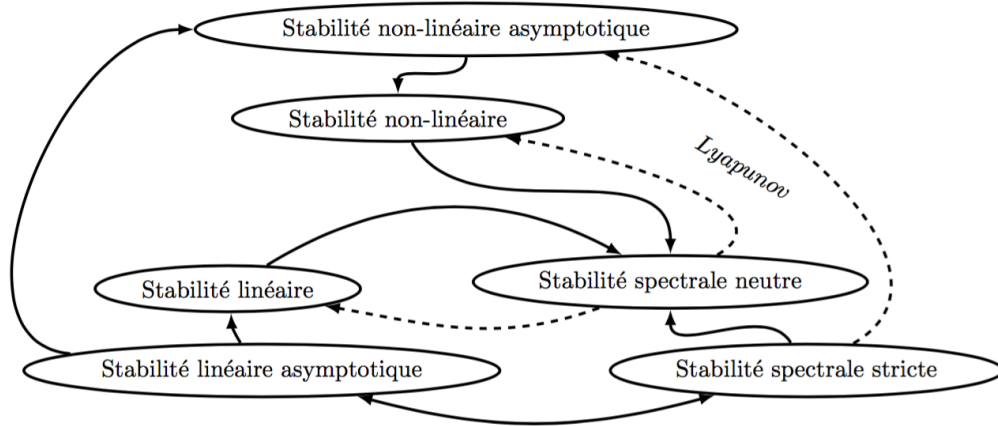


FIGURE 0.1. Schéma représentant les implications entre les notions de stabilité des équilibres d'ÉDO en dimension finie.

neutre dans le cas où l'on impose aux valeurs propres imaginaires pures d'être semi-simples. C'est aussi sous cette hypothèse que la théorie de Lyapunov lie stabilité spectrale et stabilité non-linéaire. Ces liens supplémentaires sont représentés en pointillés. Pour plus de détails sur ces notions, voir [7].

Dans le cas d'équations aux dérivées partielles il est souvent difficile de démontrer de telles relations entre les différentes notions de stabilité. En particulier, il n'existe pas de résultat général concernant l'implication entre stabilité spectrale et stabilité non-linéaire dans le cas des ÉDP. De plus, pour les systèmes hamiltoniens, on ne peut pas espérer mieux qu'une stabilité neutre au niveau spectral comme on le verra ci-dessous. On se passera donc de la dénomination neutre pour désigner les notions spectrales et non-linéaires. Les équations qui sont l'objet de cette thèse sont également invariantes par translation. Cette propriété essentielle pour l'existence d'ondes progressives périodiques nous force à assouplir les notions de stabilité. On parle alors de *stabilité orbitale* en référence aux orbites décrites par ces ondes dans l'espace des phases.

Définition 0.2. On dit qu'un profil $\underline{\mathbf{U}}$ solution de (12)-(13) est conditionnellement orbitalement stable pour une certaine norme fonctionnelle $\|\cdot\|$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute condition initiale \mathbf{U}_0 satisfaisant $\|\mathbf{U}_0 - \underline{\mathbf{U}}\| < \eta$, si on note T le temps maximal d'existence de la solution $\mathbf{U} : t \mapsto \mathbf{U}(t, \cdot)$ de (2) avec $\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0$, alors

$$\inf_{s \in \mathbb{R}} \|\mathbf{U}(t, \cdot) - \underline{\mathbf{U}}(\cdot + s)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T].$$

L'adverbe « conditionnellement » dans la définition 0.2 pointe le fait que contrairement à ce qu'il se passe en dimension finie, l'existence globale des solutions perturbées n'est pas automatiquement assurée. Cela permet autant que possible de séparer les propriétés dont on pense qu'elles relèvent de la stabilité de la solution $\underline{\mathbf{U}}$ de celles associées au caractère bien posé de l'équation puisqu'en général, la norme $\|\cdot\|$ n'est pas celle dans laquelle le problème de Cauchy est localement bien posé. Dans ce qui suit, on considèrera un cadre fonctionnel pour lequel le profil $\underline{\mathbf{U}}$ et la condition initiale \mathbf{U}_0 sont périodiques de mêmes périodes.

On mesure en quelque sorte une distance entre classes d'équivalence de solutions modulo les translations spatiales. Autour des ondes progressives périodiques considérées dans

tout l'espace, on s'attend à devoir encore assouplir la notion de stabilité orbitale pour la notion de *stabilité modulée en espace* développée dans [107, 78]. Dans ce cas, on n'autorise plus uniquement des translations uniformes mais des changements de variables plus complexes, qui restent localement proches d'être des translations uniformes, et on mesure une distance entre le profil $\underline{\mathbf{U}}$ et la solution perturbée par

$$\inf_{\psi \text{ inversible}} \|(\mathbf{U} \circ \psi)(t, \cdot) - \underline{\mathbf{U}}\| + \|\partial_x(\psi - \text{Id}_{\mathbb{R}})\|, \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans cette thèse, où l'on ne considère au niveau non linéaire que des conditions de bord périodiques, la notion de stabilité orbitale sera néanmoins suffisante.

Par invariance par translation, les ondes progressives périodiques $\mathbf{U}(t, x) = \underline{\mathbf{U}}(x - ct)$ solutions de (2) vérifient l'équation dans le repère mobile à la vitesse c

$$\partial_t \mathbf{U} - c \partial_x \mathbf{U} = \mathcal{J}(\delta \mathcal{H}[\mathbf{U}]),$$

qui s'écrit de manière équivalente grâce à (7)

$$(15) \quad \partial_t \mathbf{U} = \mathcal{J}(\delta(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\mathbf{U}]),$$

et qui admet $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}(x)$ comme solution stationnaire. En linéarisant (15) autour du profil $\underline{\mathbf{U}}$, on obtient le système

$$\partial_t \mathbf{U} = \mathbf{B} \partial_x (\mathcal{A} \mathbf{U}),$$

où $\mathcal{A} = \text{Hess}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}]$ désigne la hessienne de l'opérateur $\mathcal{H} + c\mathcal{Q}$, avec

$$\text{Hess} \mathcal{Q}[\underline{\mathbf{U}}] = \mathbf{B}^{-1},$$

$$(\text{Hess} \mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}] \mathbf{U})_{\alpha} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha} \partial U_{\beta}} U_{\beta} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha} \partial U_{\beta, x}} U_{\beta, x} - \text{D}_x \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha, x} \partial U_{\beta}} U_{\beta} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha, x} \partial U_{\beta, x}} U_{\beta, x} \right),$$

où toutes les dérivées secondes de \mathcal{H} sont évaluées en $(\underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{U}}_x)$. Par définition, la stabilité spectrale de $\underline{\mathbf{U}}$ dépend du spectre de l'opérateur $\mathbf{A} = \mathcal{J} \mathcal{A} = \mathbf{B} \partial_x \mathcal{A}$ sur l'espace fonctionnel sur lequel il opère.

Définition 0.3. *Si le spectre de l'opérateur différentiel \mathbf{A} agissant sur $L^2(\mathbb{R})$ est inclus dans le demi-plan fermé gauche du plan complexe alors le profil $\underline{\mathbf{U}}$ sera dit spectralement stable. En revanche, s'il y a du spectre strictement à droite de l'axe imaginaire, le profil sera spectralement instable.*

L'opérateur \mathcal{J} étant anti-symétrique, tandis que l'opérateur \mathcal{A} est symétrique, le spectre ponctuel de \mathbf{A} est composé de quadruplets $(z, -z, \bar{z}, -\bar{z})$ et donc il ne peut y avoir stabilité spectrale que si le spectre est sur l'axe imaginaire du plan complexe. L'opérateur \mathbf{A} est à coefficients Ξ -périodiques, où Ξ désigne la période du profil $\underline{\mathbf{U}}$.

Un outil adapté à l'étude du spectre des opérateurs à coefficients périodiques est la décomposition de Floquet-Bloch. À l'opérateur différentiel \mathbf{A} à coefficients Ξ -périodiques, on peut associer une famille d'opérateurs \mathbf{A}_{ξ} agissant sur $L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ par

$$\mathbf{A}_{\xi} = e^{-i\xi \cdot} \mathbf{A} e^{i\xi \cdot}, \quad \xi \in \mathbb{R}/(2k\pi)\mathbb{Z},$$

où $k = 1/\Xi$ est le nombre d'onde. De manière équivalente, en identifiant opérateur différentiel et symbole, $\mathbf{A}_{\xi}(\cdot, \partial_x) = \mathbf{A}(\cdot, \partial_x + i\xi)$. La décomposition de Floquet-Bloch est liée à la théorie de Floquet pour l'étude des ÉDO à coefficients périodiques dans laquelle $\Xi\xi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est appelé *exposant de Floquet*. La recherche de fonctions propres co-périodiques, c'est-à-dire de même période que l'opérateur \mathbf{A} (ou que le profil $\underline{\mathbf{U}}$ qui le définit) correspond à l'étude de l'exposant de Floquet $\xi = 0$. C'est grâce à la décomposition de Floquet-Bloch que l'étude de stabilité de solutions périodiques de systèmes de lois de conservation visqueux a pu aboutir [78, 79]. La propriété qui nous intéresse en

particulier concerne le lien entre le spectre de l'opérateur \mathbf{A} et celui de la famille \mathbf{A}_ξ . On a la relation suivante

$$(16) \quad \sigma(\mathbf{A}) = \bigcup_{\xi \in [-\pi/\Xi, \pi/\Xi]} \sigma(\mathbf{A}_\xi).$$

L'avantage de la décomposition (16) est que le spectre de chaque opérateur \mathbf{A}_ξ est composé de valeurs propres isolées et de multiplicité finie, chacune dépendant continûment de la variable ξ [60].

Bien que les problèmes de stabilité (non linéaire ou spectrale) d'ondes périodiques soient plus naturellement posés dans tout l'espace, au niveau non linéaire on se restreindra à des perturbations co-périodiques, c'est-à-dire de même période que l'onde de référence. Au niveau spectral cela correspond à se restreindre à l'exposant de Floquet $\xi = 0$, alors que le problème dans tout l'espace mobilise l'ensemble des exposants de Floquet. On présente ci-dessous une condition suffisante de stabilité non-linéaire vis-à-vis de perturbations co-périodiques.

Des résultats de stabilité orbitale co-périodique ont pu être obtenus par Gallay & Hărăguș pour l'équation de NLS [55]. Concernant l'équation de KdV, les résultats de stabilité non-linéaire sont dus entre autres à Angulo Pava, Bona & Scialom [6]. Les travaux de Angulo Pava [4] concernent les équations de NLS et de mKdV. La stabilité orbitale pour l'équation de Boussinesq est traitée par Arruda [8]. Concernant (gKdV), la stabilité orbitale et co-périodique a été étudiée par Johnson [77].

Bien que d'autres types de perturbations soient évoqués dans ce manuscrit, une grande partie des résultats détaillés ci-dessous sont obtenus sous l'hypothèse de co-périodicité. Des résultats de stabilité orbitale ont été établis pour des perturbations dont la période est un multiple de celle de l'onde de référence. On parle alors de perturbation *sous-harmonique*. Pour l'équation de NLS, voir les travaux de Bottman Deconinck & Nivala [27] et ceux de Gallay & Pelinovsky [57]. La stabilité orbitale sous-harmonique de l'équation de KdV est traitée par Deconinck & Kapitula [42] et celle de l'équation mKdV par Deconinck & Nivala [44]. Concernant la stabilité spectrale sous perturbations bornées, l'équation de KdV est traitée par Bottman & Deconinck [26].

On verra ci-dessous que l'on peut également définir la notion de *stabilité modulationnelle*. Cette notion spécifique aux ondes périodiques est liée à la théorie des modulations introduite par Whitham [121]. En réalité, on parle plus souvent d'instabilité modulationnelle, comme celle mise en évidence par Benjamin & Feir [11] dans leur étude des ondes de Stokes. Un large panel de manifestations physiques de ce type d'instabilité est présenté dans l'article de Zakharov & Ostrovsky [126].

5. Critères de stabilité et intégrale d'action

On souhaite établir une caractérisation simple des propriétés de stabilité d'une onde périodique donnée de période Ξ et de profil \mathbf{U} en utilisant les paramètres $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \mathbb{R}^{N+2}$ qui définissent le profil de l'onde. L'étude se restreint toujours aux cas $N = 1$ ou 2 , tout en conservant une liberté totale sur le choix des non-linéarités. En pratique, l'objectif est d'établir des critères sous forme d'un ensemble de conditions nécessaires ou suffisantes de stabilité ou d'instabilité et qui pourront être évaluées numériquement. L'expression de ces *critères de stabilité* a été obtenue à partir de travaux entamés par Benzoni-Gavage, Noble & Rodrigues [21, 22] et poursuivis pendant cette thèse. Les critères de stabilité et leur exploitation numérique ont fait l'objet d'une publication [20], reproduite en annexe A, et sont présentés dans le second chapitre de ce manuscrit.

Comme dans le cas des solutions stationnaires d'ÉDO, l'idée est de tirer profit de la théorie de Lyapunov. Les difficultés inhérentes aux ÉDP sont traitées par l'approche de Grillakis-Shatah-Strauss. Celle-ci permet d'établir un critère pour que la fonctionnelle

$$\mathcal{F}^{(\mu, \lambda, c)} : \mathbf{U} \mapsto \int_0^\Xi (\mathcal{H}[\mathbf{U}] + c\mathcal{Q}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{U} + \mu) dx,$$

admette un minimum local en $\underline{\mathbf{U}}$, non pas sur son espace de définition $\mathbb{H}^1 = H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times (L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^{N-1}$ mais sur une variété *contrainte* $\mathbb{H}^1 \cap \mathcal{C}$, avec

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{U} \in (L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N ; \int_0^\Xi \mathbf{U} dx = \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx ; \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}) dx = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx \right\}.$$

Les contraintes sont liées au fait que les intégrales $\int_0^\Xi \mathbf{U} dx$ et $\int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}) dx$ sont conservées le long des solutions Ξ -périodiques de (2). Cette approche est bien connue dans le cas des solitons [67], pour lesquels elle a permis d'établir un critère de stabilité impliquant la dérivée seconde du moment de Boussinesq par rapport à la vitesse du soliton $\mathcal{M}_{cc} > 0$ où

$$\mathcal{M}(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}_\infty] + c\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}_\infty) + \boldsymbol{\lambda}_\infty \cdot \underline{\mathbf{U}}_\infty + \mu_\infty) dx,$$

les paramètres $\boldsymbol{\lambda}_\infty$ et μ_∞ étant déterminés par la vitesse c et l'état à l'infini du soliton de profil $\underline{\mathbf{U}}_\infty$. Pour une onde périodique de profil $\underline{\mathbf{U}}$, la valeur de $\mathcal{F}^{(\mu, \lambda, c)}$ au profil $\underline{\mathbf{U}}$ définit la fonction

$$(17) \quad \Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \int_0^\Xi (\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}] + c\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \mu) dx,$$

qui joue le rôle de $\mathcal{M}(c)$. On verra que Θ est une *intégrale d'action* et qu'elle joue un rôle absolument central pour l'étude des propriétés de stabilité des ondes périodiques. L'idée est de caractériser le comportement de $\mathcal{F}^{(\mu, \lambda, c)}$ au voisinage de $\underline{\mathbf{U}}$ grâce aux propriétés de la matrice hessienne de Θ , en cherchant une condition pour que l'opérateur $\mathcal{A} = \text{Hess}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}]$ soit positif sur

$$T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{U} \in (L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N ; \int_0^\Xi \mathbf{U} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx = 0 ; \int_0^\Xi \mathbf{U} dx = 0 \right\}.$$

On a ainsi établi la pseudo-alternative suivante, impliquant la signature négative $n(\text{Hess}\Theta)$ de la matrice $\text{Hess}\Theta$, c'est-à-dire le nombre de valeurs propres négatives en comptant leur multiplicité.

Théorème 0.2. *Soit $N \in \{1, 2\}$ et \mathcal{H} de la forme (4)-(5). On fait les hypothèses suivantes*

- (1) *Il existe un ouvert Ω de \mathbb{R}^{N+2} et une famille de profils périodiques $\underline{\mathbf{U}}$ paramétrés par $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$ solutions des équations de profil (12)-(13). De plus, si on note Ξ la période du profil $\underline{\mathbf{U}}$*

$$(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega \mapsto (\underline{\mathbf{U}}, \Xi) \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

est continument différentiable.

- (2) *La période Ξ est une fonction strictement monotone du paramètre μ ($\Xi_\mu \neq 0$) et l'intégrale d'action Θ définie par (17) est telle que la matrice $\text{Hess}\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ est inversible pour tout $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$.*
- (3) *Pour toute période Ξ dans l'ensemble des périodes atteintes sur Ω , il existe un sous-espace dense \mathbb{H}_Ξ de $(L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N$ et un ouvert de \mathbb{H}_Ξ sur lequel la fonctionnelle*

$$\mathbf{U} \mapsto \int_0^\Xi \mathcal{H}[\mathbf{U}] dx$$

est de classe \mathcal{C}^2 , et si on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre \mathbb{H}'_{Ξ} et \mathbb{H}_{Ξ} , il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}_{\Xi}}^2 = \langle \text{Hess}\mathcal{H}[\mathbf{U}]\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle + \alpha \|\mathbf{U}\|_{L^2}^2$$

définisse une norme équivalente sur \mathbb{H}_{Ξ} , uniformément selon les paramètres caractérisants le profil $(\underline{\mathbf{U}}, \Xi)$.

- (4) Pour toute période Ξ dans l'ensemble des périodes atteintes sur Ω , il existe un sous-espace dense \mathbb{W}_{Ξ} de \mathbb{H}_{Ξ} pour lequel le problème de Cauchy associé à (2) est localement bien posé.

Alors on a la pseudo alternative suivante : pour tout $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$

- si $n(\text{Hess}\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)) - N = 0$, alors l'onde associée est orbitalement stable,
- si $n(\text{Hess}\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)) - N$ est impair, alors l'onde associée est spectralement instable.

Ce théorème est démontré dans l'article reproduit reproduit à l'annexe A (voir rq. A.9).

La démonstration de la première partie de ce théorème s'appuie sur un résultat de nature algébrique [105, 84] qui lie les signatures négatives de la hessienne de la fonctionnelle $\mathcal{F}^{(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)}$ que l'on essaie de minimiser avec et sans contraintes avec la signature négative de la matrice jacobienne des contraintes.

La partie concernant l'instabilité spectrale co-périodique repose sur un calcul de fonction d'Evans pour l'exposant de Floquet $\xi = 0$. Le problème spectral que l'on considère se présente en effet sous la forme

$$(18) \quad z\mathbf{U} = \mathcal{A}\mathbf{U}, \quad z \in \mathbb{C},$$

ce qui revient à chercher des solutions de type $e^{zt}\mathbf{U}(x)$ de (2). Les fonctions propres \mathbf{U} sont solutions d'un système d'ÉDO en x dont on note $\mathbf{F}(\cdot, z)$ la solution fondamentale. La fonction d'Evans dont on calcule le développement est définie par

$$D(z) = \det(\mathbf{F}(\Xi, z) - \mathbf{F}(0, z)).$$

Les solutions du problème spectral (18) sont données par $D(z) = 0$. Par des développements asymptotiques de cette fonction d'Evans quand $|z| \rightarrow 0$ et quand z est réel et tend vers $+\infty$, on obtient une condition suffisante d'instabilité spectrale

$$(-1)^N \det(\text{Hess}\Theta) < 0,$$

ce qui équivaut dans le cas $N = 1$ ou $N = 2$ à $n(\text{Hess}\Theta) - N$ impair. Des calculs de fonction d'Evans de ce type apparaissent également dans les travaux de Bronski, Johnson & Kapitula [33, 34], qui traitent de l'instabilité spectrale de l'équation de KdV généralisée.

6. Modulations à la Whitham

L'intégrale d'action Θ apparaît aussi naturellement dans la théorie des *modulations* introduite par Whitham en 1965 [121]. Cette théorie est la base d'une autre notion de stabilité associée aux ondes périodiques : la *stabilité modulationnelle*. À partir de paramètres « physiques » des ondes comme le nombre d'onde local, la moyenne et la moyenne du moment

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{\Xi}, \\ \mathbf{M} &= k \int_0^{\Xi} \underline{\mathbf{U}} dx, \\ P &= k \int_0^{\Xi} \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx, \end{aligned}$$

on considère une perturbation les faisant évoluer plus lentement que l'oscillation du profil lui-même.

Sous l'hypothèse que l'application $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \mapsto (k, \mathbf{M}, P)$ soit un difféomorphisme (voir [21, Cor. 1]), les solutions de (2) sous forme d'onde progressive périodique sont paramétrées par (k, \mathbf{M}, P)

$$\mathbf{U}(t, x) = \underline{\mathbf{U}}^{(k, \mathbf{M}, P)}(kx + \omega(k, \mathbf{M}, P)t),$$

où $c = c(k, \mathbf{M}, P)$ désigne la vitesse $\omega = \omega(k, \mathbf{M}, P) = -k c(k, \mathbf{M}, P)$ la pulsation locale et où l'on a noté explicitement la dépendance du profil $\underline{\mathbf{U}}$ par rapport aux paramètres. On s'intéresse à des solutions de (2) sous la forme de train d'onde lentement modulé

$$\mathbf{U}(t, x) = \underline{\mathbf{U}}^{(k, \mathbf{M}, P)(\varepsilon t, \varepsilon x)} \left(\frac{\phi(\varepsilon t, \varepsilon x)}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon),$$

où la fonction ϕ est une phase que l'on décrit plus loin. Par différentes méthodes (voir le livre de Whitham [123]), on peut obtenir formellement un système de $(N + 2)$ lois de conservation supposé régir l'évolution de (k, \mathbf{M}, P) sur les grandes échelles de temps et d'espace. On l'appelle *le système d'équations modulées de Whitham*. Ce sont des équations moyennées. Elles peuvent être obtenues en effectuant un développement asymptotique formel

$$(19) \quad \mathbf{U}(t, x) = \mathbf{U}^0(T, X, \phi(T, X)/\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{U}^1(T, X, \phi(T, X)/\varepsilon) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

dans lequel on introduit des variables temporelle et spatiale lentes, $T = \varepsilon t$ et $X = \varepsilon x$ et les profils \mathbf{U}^0 et \mathbf{U}^1 sont périodiques en la phase $\varphi = \phi/\varepsilon$.

À la phase $\phi = \phi(T, X)$ on associe

$$\phi_X = k, \quad \phi_T = \omega = -ck,$$

où k est le nombre d'onde local et ω la pulsation locale, dépendant de (X, T) , tout comme c . On suppose que la phase est deux fois différentiable, ce qui fournit la première équation modulée

$$(20) \quad \partial_T k + \partial_X \omega = 0.$$

Les deux équations suivantes sont obtenues en injectant le développement asymptotique (19) dans (2) et (6), ainsi qu'en utilisant les relations de dérivation $\partial_t = \varepsilon \partial_T + \omega \partial_\varphi$ et $\partial_x = \varepsilon \partial_X + k \partial_\varphi$. À partir de ces relations de dérivation, on obtient également la relation

$$(\delta \mathcal{H}[\mathbf{U}])_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_\alpha} - k D_\varphi \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha, x}} \right) - \varepsilon D_X \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha, x}} \right),$$

et ainsi l'équation (2) devient

$$\varepsilon \partial_T \mathbf{U} + \omega \partial_\varphi \mathbf{U} = \mathbf{B} (\varepsilon \partial_X + k \partial_\varphi) (\delta \mathcal{H}(\mathbf{U}, \varepsilon \mathbf{U}_X + k \mathbf{U}_\varphi)).$$

En se rappelant que $\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \varepsilon \mathbf{U}^1 + o(\varepsilon)$, on regroupe maintenant les termes par ordre de ε . L'équation d'ordre zéro fournit

$$\omega \mathbf{B}^{-1} \partial_\varphi (\mathbf{U}_\alpha^0) - k \partial_\varphi \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_\alpha} - k D_\varphi \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha, x}} \right) \right) = 0,$$

les dérivées du hamiltonien étant toutes évaluées en $(\mathbf{U}^0, k \mathbf{U}_\varphi^0)$. Cette équation s'écrit de manière équivalente

$$(21) \quad \partial_\varphi (G^0 + c V^0) = 0,$$

où

$$G_\alpha^0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_\alpha} - k D_\varphi \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha, x}} \right), \quad V_\alpha^0 = \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial U_\alpha} = (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{U}^0)_\alpha.$$

L'équation (21) est en réalité équivalente à l'équation de profil (12) via le changement d'échelle $X = \varepsilon x$. Plus précisément, $G^0 + cV^0 = -\boldsymbol{\lambda}$ entraîne que

$$\mathbf{U}^0(T, X, \varphi) = \underline{\mathbf{U}}^{(k, \mathbf{M}, P)(T, X)}(\varphi).$$

À l'ordre $O(\varepsilon)$, on obtient

$$\partial_T \mathbf{U}_\alpha^0 = \mathbf{B} \partial_X \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_\alpha} - k D_\varphi \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha, x}} \right) \right) + \mathbf{B} k \partial_\varphi F^1,$$

où les dérivées du hamiltonien sont toujours évaluées en $(\mathbf{U}^0, k\mathbf{U}_\varphi^0)$ et le terme F^1 regroupe les apparitions de \mathbf{U}^1 . Ce qui nous intéresse particulièrement ici, c'est qu'un calcul de moyenne pour $\varphi \in [0, 1]$, notée $\langle \cdot \rangle$, permet d'annuler les termes faisant intervenir \mathbf{U}^1 par périodicité. Il reste alors

$$(22) \quad \partial_T \langle \mathbf{U}^0 \rangle = \mathbf{B} \partial_X \langle G^0 \rangle,$$

La dernière équation du système modulé peut être obtenue à partir de l'équation de conservation du moment (6). On procède de la même manière que précédemment, on injecte l'ansatz du développement asymptotique de la solution, on regroupe les termes suivant leur ordre en ε et on calcule une moyenne pour $\varphi \in [0, 1]$. On obtient

$$(23) \quad \partial_T \langle \mathcal{Q}(\mathbf{U}^0) \rangle = \partial_X \langle \mathcal{S}^0 \rangle,$$

où (toujours avec la convention de sommation d'Einstein)

$$\mathcal{S}^0 = \mathbf{U}^0 \cdot G^0 - \mathcal{H}(\mathbf{U}^0, k\mathbf{U}_\varphi^0) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha, x}} k(\mathbf{U}_\varphi^0)_\alpha.$$

Finalement, le système modulé de Whitham est un système composé de lois de conservation du premier ordre portant sur les inconnues (k, \mathbf{M}, P) regroupant les équations (20), (22) et (23)

$$(24) \quad \begin{cases} \partial_T k &= -\partial_X (ck), \\ \partial_T \mathbf{M} &= \mathbf{B} \partial_X \langle G^0 \rangle, \\ \partial_T P &= \partial_X \langle \mathcal{S}^0 \rangle, \end{cases}$$

où $\mathbf{M} = \langle \mathbf{U}^0 \rangle$ et $P = \langle \mathcal{Q}(\mathbf{U}^0) \rangle$. L'obtention de ce système est détaillée dans [22, § 2.1]. On peut réécrire les flux du membre de droite en faisant apparaître plus explicitement les paramètres (k, \mathbf{M}, P) en utilisant les équations de profil (12) et (13)

$$\langle G^0 \rangle = \left\langle -c \mathbf{B}^{-1} \underline{\mathbf{U}}^{(k, \mathbf{M}, P)} - \boldsymbol{\lambda} \right\rangle = -c \mathbf{B}^{-1} \mathbf{M} - \boldsymbol{\lambda},$$

$$\langle \mathcal{S}^0 \rangle = \left\langle \mu - c \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}^{(k, \mathbf{M}, P)}) \right\rangle = \mu - cP.$$

Il est délicat de faire le lien entre perturbation de la donnée initiale du problème (2) et donnée initiale associée au système (24). Il n'est en général pas simple de construire une donnée initiale adaptée à l'ansatz (19) à partir d'une donnée initiale générale de (2). Pour le calcul de conditions initiales bien préparées dans le cadre de lois de conservation visqueuses, on peut voir [78, Th. 1.12 & Rq. 1.14].

Les équations moyennées (24) sont supposées décrire l'évolution lente des paramètres du profil $\underline{\mathbf{U}}^{(k, \mathbf{M}, P)}$ et sont à l'origine d'une nouvelle définition de stabilité.

Définition 0.4. *On dira que l'onde périodique $\underline{\mathbf{U}}$ est modulationnellement stable si les équations modulées de Whitham (24) sont hyperboliques au point (k, \mathbf{M}, P) correspondant à $\underline{\mathbf{U}}$.*

Des instabilités modulationnelles ont été mises en évidence par Benjamin & Feir [11] dans le cas des ondes de Stokes ou encore par Zakharov & Ostrovsky [126]. Les équations modulées sont également à la base de l'étude des chocs dispersifs [52] décrite ci-dessous. Rappelons que dans cette thèse, on étudie le cas des ondes périodiques de systèmes hamiltoniens de une ou deux équations ($N = 1$ ou 2).

Comme dans le cas de la stabilité orbitale, on cherche à établir une caractérisation simple de la stabilité modulationnelle, sous forme de critère que l'on pourra évaluer numériquement. C'est dans ce cadre que l'on exploite de nouveau l'intégrale d'action

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \int_0^\Xi (\mathcal{H}[\mathbf{U}] + c\mathcal{Q}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{U} + \mu) dx.$$

D'après l'équation de profil (13) et sous réserve de régularité du hamiltonien \mathcal{H} , on peut réécrire cette intégrale sous la forme

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \oint \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_x}(\mathbf{U}, v_x) dv,$$

qui est une intégrale le long de l'orbite associée à \underline{v} dans le plan $(v; v_x)$. Tant que l'application $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \mapsto (\mathbf{U}, \Xi)$ est régulière, on peut calculer les dérivées premières de l'action et l'on trouve, parce que c'est une intégrale d'action,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mu} = \Xi = \frac{1}{k}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial c} = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}) dx = \frac{P}{k}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Theta = \int_0^\Xi \mathbf{U} dx = \frac{\mathbf{M}}{k}.$$

On montre [21, Prop. 1 & 2, Cor. 1] que l'on peut réécrire le système de Whitham (24) pour qu'il porte sur les variables $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$

$$(25) \quad \begin{cases} \partial_T(\partial_\mu \Theta) + c \partial_X(\partial_\mu \Theta) - (\partial_\mu \Theta) \partial_X c = 0, \\ \partial_T(\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Theta) + c \partial_X(\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Theta) + (\partial_\mu \Theta) \mathbf{B} \partial_X \boldsymbol{\lambda} = 0, \\ \partial_T(\partial_c \Theta) + c \partial_X(\partial_c \Theta) - (\partial_\mu \Theta) \partial_X \mu = 0. \end{cases}$$

qui se réécrit sous forme matricielle avec $\mathbf{W}^\top = (\mu, \boldsymbol{\lambda}^\top, c)$

$$\text{Hess} \Theta \partial_T \mathbf{W} + (c \text{Hess} \Theta + \Theta_\mu \mathbf{S}) \partial_X \mathbf{W} = 0,$$

avec

$$\mathbf{S} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 \cdots 0 & -1 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \mathbf{B} & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \hline -1 & 0 \cdots 0 & 0 \end{array} \right).$$

En supposant de plus la matrice $\text{Hess} \Theta$ inversible, on peut réécrire le système modulé sous forme quasi-linéaire

$$\partial_T \mathbf{W} + \mathbf{D} \partial_X \mathbf{W} = 0.$$

où la matrice \mathbf{D} de taille $N + 2$ est définie par

$$(26) \quad \mathbf{D} = c \text{Id} + \Xi (\text{Hess} \Theta)^{-1} \mathbf{S}.$$

Les variables $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ présentent l'avantage de donner un système « fermé » (25) et rendent possible l'exploration numérique. En pratique, la stabilité modulationnelle d'un profil donné pourra donc être explorée numériquement à travers le spectre de la matrice \mathbf{D} . Si le spectre de cette matrice est réel, alors le système est hyperbolique et l'onde associée est modulationnellement stable.

Malgré son apparence symétrique, le système quasi-linéaire (25) n'appartient pas en général à la classe des systèmes hyperboliques symétrisables, puisque la matrice $\text{Hess} \Theta$ n'est pas nécessairement définie positive. En réalité, cette propriété est essentiellement

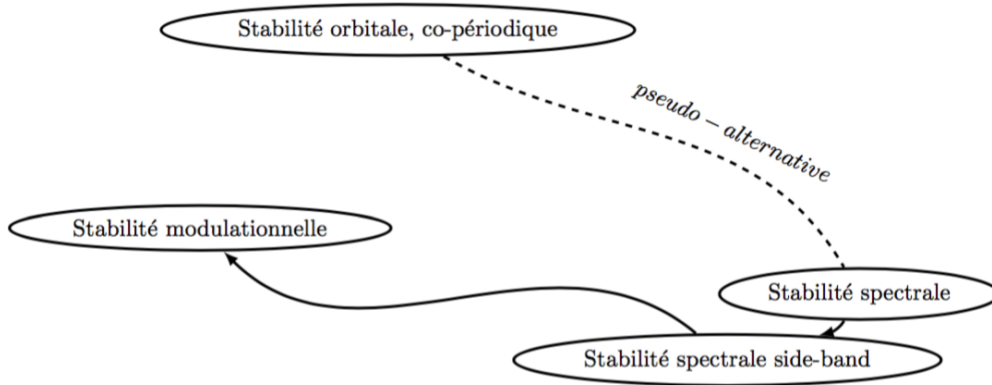


FIGURE 0.2. Schéma représentant les relations entre les notions de stabilité des solutions périodiques d'ÉDP.

incompatible avec le critère de stabilité co-périodique du théorème 0.2.

Les travaux concernant le critère de stabilité modulationnelle ont été entamés par Benzoni-Gavage, Noble & Rodrigues [21, 22] puis développés pendant cette thèse. L'obtention de ce critère et son exploitation numérique sont détaillées dans le second chapitre de ce manuscrit.

La notion de stabilité modulationnelle semble à première vue n'avoir aucun lien avec les notions de stabilité spectrale et de stabilité orbitale. C'est à travers la théorie de G. Floquet décrite ci-dessus que l'on peut connecter stabilité spectrale « side-band » et stabilité modulationnelle. Le terme side-band est utilisé pour décrire les exposants de Floquet proches de $\xi = 0$ qui apparaissent dans la décomposition de Floquet-Bloch (16). D'après [22, Th. 1], une condition nécessaire pour qu'une onde périodique soit spectralement stable vis-à-vis de perturbations side-band est qu'elle soit modulationnellement stable. Ce résultat semble avoir été considéré comme acquis depuis les travaux de Whitham même [121], et de Zakharov [125], mais aucune preuve rigoureuse n'avait été donnée avant les années 2000. Il est démontré dans un cadre hamiltonien général par une méthode perturbative qui lie la matrice du système (24) à un développement impliquant la famille d'opérateurs $(\mathbf{A}_\xi)_{\xi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}$ apparaissant dans la décomposition de Floquet-Bloch. Les travaux de Bronski, Zumbrun & Johnson [80, 32] avaient déjà établi un tel lien pour l'équation (gKdV) et ceux de Serre [115] pour les systèmes de lois de conservation visqueux. La figure 0.2 illustre les différentes relations entre les notions de stabilité, cette fois dans le cas des ondes périodiques solutions d'ÉDP.

Un défaut majeur de la formulation quasi-linéaire précédente du système de Whitham est que les différentes dérivées de l'action $\partial_\mu \Theta = 1/k$, $\nabla_\lambda \Theta = \Xi(\mathbf{U})$ et $\partial_c \Theta = \Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U})$ tendent vers l'infini à mesure que l'on s'approche de la limite soliton, c'est-à-dire quand $k \rightarrow 0$ ou de manière équivalente quand $\Xi \rightarrow +\infty$. Ces divergences sont un obstacle pour l'étude des chocs dispersifs par les modulations telle qu'elle sera décrite ci-dessous. C'est pourquoi on a introduit des variables d'étude différentes, qui ont des limites finies à la fois dans la limite du soliton et dans la limite harmonique (ou faible amplitude) et qui rendent le système modulé plus « symétrique » pour l'étude de ces deux régimes extrêmes. Ces variables avaient été mises en évidence par Gavriluyuk & Serre [63] pour le système d'Euler-Korteweg. Elles s'avèrent valables dans un cadre hamiltonien assez général, qui inclut (gKdV) et le système d'Euler-Korteweg en coordonnées eulériennes.

Avec nos notations, la nouvelle variable s'écrit en coordonnées lagrangiennes de masse

$$\alpha = \frac{1}{k} (\langle \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \rangle - \mathcal{Q}(\langle \underline{\mathbf{U}} \rangle)) .$$

On considère alors le jeu de coordonnées (k, α, \mathbf{M}) dans lequel il s'avère que le système modulé s'écrit

$$(27) \quad \begin{cases} \partial_T k & - & \partial_X (\partial_\alpha \mathbf{H}) & = & 0, \\ \partial_T \alpha & - & \partial_X (\partial_k \mathbf{H}) & = & 0, \\ \partial_T \mathbf{M} & - & \partial_X (\mathbf{B} \nabla_{\mathbf{M}} \mathbf{H}) & = & 0, \end{cases}$$

où la fonction \mathbf{H} est définie comme la moyenne spatiale du hamiltonien \mathcal{H}

$$\mathbf{H}[\underline{\mathbf{U}}] = \langle \mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}] \rangle = \frac{1}{\Xi} \int_0^\Xi \mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}] dx .$$

L'un des avantages de cette formulation provient du fait qu'aucune de ces coordonnées ne diverge dans les régimes extrêmes soliton ou harmonique. En effet, le nombre d'onde tend vers 0 dans la limite soliton et possède une limite finie dans la limite faible amplitude. L'inverse se produit pour la quantité α qui tend vers 0 dans la limite harmonique, où l'amplitude de l'onde tend vers 0, et possède une limite finie dans le régime soliton. La moyenne \mathbf{M} reste bornée dans les deux limites.

Le hamiltonien moyenné \mathbf{H} est également très lié à l'intégrale d'action puisque d'après la définition de Θ et les relations sur ses dérivées, on a l'égalité

$$\Theta = \Xi \mathbf{H} + c \partial_c \Theta + \boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Theta + \mu \partial_\mu \Theta .$$

La forme particulière de (27) montre immédiatement que \mathbf{H} est une entropie mathématique pour les équations modulées. La loi de conservation satisfaite par \mathbf{H} peut se retrouver par un calcul de moyenne à partir de celle vérifiée par le hamiltonien \mathcal{H} . En conséquence, la stricte convexité du hamiltonien moyenné $\mathbf{H}(k, \alpha, \mathbf{M})$ est une condition suffisante d'hyperbolicité du système de Whitham mais on verra que cette condition n'est jamais vérifiée, au moins pour les cas que nous avons testés numériquement.

Du point de vue théorique, les coordonnées (k, α, \mathbf{M}) permettent de mieux comprendre les limites soliton et faible amplitude. La formulation du système de Whitham dans ces variables permet de prouver que celui-ci est seulement faiblement hyperbolique (au sens où il a une valeur propre réelle double non semi-simple) dans les deux limites. En effet, on a les relations sur les dérivées suivantes

$$\partial_\alpha \mathbf{H} = -k c, \quad \partial_k \mathbf{H} = \Theta - \alpha c ,$$

qui démontrent que $\partial_\alpha \mathbf{H} \rightarrow 0$ dans la limite soliton $k \rightarrow 0$ et $\partial_k \mathbf{H} \rightarrow 0$ dans la limite harmonique $\alpha \rightarrow 0$ (pour laquelle $\Theta \rightarrow 0$ également). Le système (27) s'écrit sous forme quasi-linéaire

$$(28) \quad \partial_T \begin{pmatrix} k \\ \alpha \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{S}} \nabla^2 \mathbf{H} \partial_X \begin{pmatrix} k \\ \alpha \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = 0 ,$$

où

$$\tilde{\mathbf{S}} := \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & \mathbf{B} \end{array} \right) .$$

Sous réserve de régularité du hamiltonien moyenné \mathbf{H} , les dérivées secondes vérifient $\partial_k^2 \mathbf{H} \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow 0$ et $\partial_\alpha^2 \mathbf{H}$ quand $k \rightarrow 0$ tandis que $\partial_{k\alpha}^2 \mathbf{H} = \partial_{\alpha k}^2 \mathbf{H}$. Ainsi dans chacune des deux limites, le système est triangulaire faisant apparaître un bloc de Jordan.

Cette remarque n'entre pas en contradiction avec les résultats analytiques dont l'on dispose dans les cas complètement intégrables, comme l'équation de KdV par exemple.

L'écriture des équations modulées sous forme diagonale à l'aide d'invariants de Riemann $(r_i)_{1 \leq i \leq N+2}$ décrite ci-dessous doit être considérée avec précaution dans l'étude des deux régimes limites. En effet, les invariants de Riemann $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ s'expriment de façon très simple

$$r_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad r_2 = \frac{1}{2}(v_3 + v_1), \quad r_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_3),$$

en fonction des trois racines v_i de l'équation polynomiale

$$\mu - \mathcal{W}(\cdot; \lambda, c) = 0,$$

qui définit une onde périodique en fonction des paramètres (μ, λ, c) . Dans les limites soliton et faible amplitude deux des racines v_i , et donc deux des invariants de Riemann r_i coïncident. Le changement de variable entre les invariants r_i et les variables (k, α, \mathbf{M}) devient alors singulier. Dans les deux régimes asymptotiques le système modulé fait apparaître une vitesse caractéristique limite commune associée à un bloc de Jordan ainsi qu'un système réduit correspondant aux équations hamiltoniennes initiales mais sans dispersion. La vitesse caractéristique commune est la vitesse du soliton dans la limite soliton et la vitesse de groupe des ondes dans la limite harmonique. La vitesse de groupe $\partial_k \omega$ est connue à travers la relation de dispersion des ondes $\omega(k, 0, \mathbf{M})$. La vitesse du soliton quant à elle correspond directement au paramètre de vitesse $c(0, \alpha, \mathbf{M})$.

7. Expérimentation numérique de la stabilité

Pour des raisons pratiques d'exploration des jeux de paramètres, on conservera la formulation en variable (μ, λ, c) pour l'étude numérique des critères de stabilité. L'équation de profil qui est à la base de l'existence des ondes périodiques s'exprime à l'aide des paramètres (μ, λ, c) . Les différentes quantités utiles comme la période ou la moyenne s'expriment comme dérivées de l'intégrale d'action par rapport à ces mêmes paramètres. L'intégrale d'action est centrale dans les critères de stabilité. Toutes ces raisons nous poussent à travailler numériquement à partir des paramètres (μ, λ, c) .

L'objectif est ici d'être en mesure d'étudier les propriétés de stabilité de tout un ensemble d'ondes périodiques paramétrées. Rappelons que les critères de stabilité co-périodique ou modulationnelle s'expriment tous en fonction des dérivées secondes de l'intégrale d'action

$$\Theta(\mu, \lambda, c) = \oint \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_x}(\underline{\mathbf{U}}, v_x) dv,$$

qui est une intégrale le long de l'orbite associée à \underline{v} dans le plan (v, v_x) . À partir de l'équation de profil (13), on peut réécrire cette intégrale

$$\Theta(\mu, \lambda, c) = \oint \sqrt{2\kappa(v)(\mu - \mathcal{W}(v; \lambda, c))} dv = 2 \int_{v_2}^{v_3} \sqrt{2\kappa(v)(\mu - \mathcal{W}(v; \lambda, c))} dv,$$

où v_2 et v_3 correspondent au minimum et au maximum du profil \underline{v} .

La première étape est d'évaluer numériquement l'ensemble des paramètres (μ, λ, c) *admissibles*, c'est-à-dire les valeurs qui sont effectivement les paramètres d'une solution périodique de l'équation de profil. L'étude détaillée du potentiel \mathcal{W} permet de calculer un certain nombre de données qui seront indispensables comme les valeurs extrémales des profils ou encore les paramètres (μ, λ, c) particuliers associés aux cas extrêmes harmonique et soliton. Toutes ces valeurs utiles sont déterminées par différents algorithmes de Newton.

L'intégrale d'action est calculée numériquement par la méthode des trapèzes dont on sait qu'elle converge exponentiellement vite pour les fonctions périodiques [120]. D'un point de vue pratique, on effectue en premier lieu un changement de variable afin de se ramener à un intervalle d'intégration fixe $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et à une fonction périodique (sinusoïdale).

Ce calcul d'intégrale sera effectué un grand nombre de fois. Il est primordial de pouvoir contrôler l'erreur numérique commise lors de cette opération non seulement au cas par cas, mais pour l'ensemble des ondes étudiées. Des évaluations analytiques et numériques d'erreur a posteriori présentées dans le second chapitre de ce manuscrit (aux sections 6.1 et 6.2) confirment la précision de notre méthode de calcul de Θ .

Les valeurs des dérivées premières de l'action liées à la période, la moyenne et la moyenne du moment ainsi que ses dérivées secondes impliquées dans les conditions des critères de stabilité sont toutes calculées par différences finies d'ordre 2. La principale difficulté de cette opération est en réalité liée à l'enchaînement des différentes approximations numériques. L'erreur commise lors du calcul d'intégrale se trouve répercutée dans le calcul de dérivées qui s'ensuit. Les difficultés numériques liées aux choix des discrétisations se font ressentir principalement dans le régime limite faible amplitude pour lequel la valeur de l'action converge vers zéro. Un choix avisé des différentes discrétisations, dont les raisons sont décrites aux sections 6.1 et 6.2 du chapitre 2, permet de s'affranchir des imprécisions dans le régime harmonique.

En revanche, le régime soliton reste difficilement accessible par cette méthode. En effet, les valeurs des dérivées premières $\partial_\mu \Theta = \Xi$, $\nabla_\lambda \Theta = \Xi \langle \underline{\mathbf{U}} \rangle$ et $\partial_c \Theta = \Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}})$ de l'intégrale d'action tendent vers l'infini dans ce régime $\Xi \rightarrow +\infty$. Il en est de même pour les dérivées secondes de l'action. Une étude précise du comportement asymptotique de Θ et de ses dérivées fait l'objet d'un article en cours de finalisation [18]. Même si du point de vue théorique, la matrice \mathbf{D} du système de Whitham a une limite finie dans le régime soliton, d'un point de vue numérique la précision de tous les calculs relatifs à cette matrice, notamment le calcul des valeurs propres, s'est avérée problématique.

L'ensemble des résultats numériques obtenus à la fois pour des équations complètement intégrables et pour des équations non-intégrables est présenté au chapitre 2, section 4. Le cas d'équations intégrables est riche de nombreux résultats analytiques qui ont permis de valider notre méthode, (KdV) et (NLS) en particulier. Concernant l'équation de KdV, l'ouvrage de Kamchatnov [82] couvre en totalité l'étude du système modulé associé. Whitham [121] a démontré que celui-ci est *riche*, c'est-à-dire qu'il possède un jeu complet d'invariants de Riemann forts r_i , $i = 1, 2, 3$. Avec ces coordonnées, le système de Whitham s'écrit sous forme diagonale

$$\partial_T r_i + V_i(r_1, r_2, r_3) \partial_X r_i = 0.$$

Les invariants de Riemann $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ s'expriment de façon très simple

$$r_1 = \frac{1}{2} (v_1 + v_2), \quad r_2 = \frac{1}{2} (v_3 + v_1), \quad r_3 = \frac{1}{2} (v_1 + v_3),$$

en fonction des trois racines v_i de l'équation polynomiale

$$\mu - \mathcal{W}(\cdot; \lambda, c) = 0,$$

qui définit une onde périodique en fonction des paramètres (μ, λ, c) . Les vitesses V_i font de plus intervenir des fonctions elliptiques. Cette diagonalisation via les invariants de Riemann est directement liée à la structure intégrable de l'équation de KdV [82]. En pratique, il sera donc possible de comparer le spectre de la matrice \mathbf{D} du système de Whitham portant sur les paramètres (μ, λ, v) que l'on calcule numériquement et les vitesses caractéristiques du système diagonalisé analytiquement. Ces comparaisons permettront de valider notre méthode de calcul de la matrice $\text{Hess}\Theta$. Les mêmes comparaisons seront faites pour l'équation de NLS, également intégrable et dont la représentation fluide via la transformation de Madelung s'exprime comme cas particulier du système d'Euler-Korteweg $N = 2$, voir [76].

D'autres propriétés importantes relatives à la structure des équations modulées, notamment les différentes convergences des vitesses caractéristiques dans les régimes harmonique et soliton, servent également de garde-fou. On rappelle que dans chacune des deux limites,

le système de Whitham fait apparaître une vitesse caractéristique limite commune : la vitesse du soliton dans la limite soliton et la vitesse de groupe des ondes dans la limite harmonique. La vitesse de groupe $\partial_k \omega$ est connue à travers la relation de dispersion des ondes $\omega(k)$. La vitesse du soliton quant à elle correspond directement au paramètre de vitesse c .

La réelle motivation de cette étude numérique est l'étude d'équations non-intégrables, dont on connaît bien moins de propriétés. Les résultats numériques présentés concernent plus particulièrement les ondes périodiques des équations de Korteweg-de Vries généralisées (gKdV) et de différentes déclinaisons du système d'Euler-Korteweg. L'ensemble de ces résultats a permis d'étendre ceux disponibles à l'heure d'aujourd'hui, qu'ils soient numériques ou analytiques, et à propos de différentes notions de stabilité co-périodique et modulationnelle.

8. Comportement des ondes périodiques perturbées

Que se passe-t-il qualitativement lorsqu'on perturbe une onde périodique ? L'évaluation numérique de critères de stabilité est une méthode détournée pour prédire la stabilité des ondes périodiques. En tant que conditions nécessaires ou suffisantes, ces critères ne fournissent généralement pas toute l'information nécessaire pour comprendre le processus complet de stabilité ou d'instabilité d'une onde périodique de profil donné. C'est pourquoi on cherche également à comprendre qualitativement le comportement des ondes périodiques perturbées au cours de l'évolution en simulant directement les solutions du système (2).

La première étape est le calcul de profils périodiques. On rappelle que le profil d'une onde périodique définie par les paramètres $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ est donné par l'équation de profil

$$\frac{1}{2} \kappa(\underline{v})(v_x)^2 + \mathcal{W}(\underline{v}; c, \boldsymbol{\lambda}) = \mu.$$

La résolution de cette ÉDO est faite par la méthode de Runge Kutta 4. On s'appuie de nouveau sur les cas intégrables de l'équation de KdV et de NLS, pour lesquels on dispose de solutions analytiques à l'aide de fonctions elliptiques, afin de valider les résultats obtenus.

Ces profils périodiques calculés sur une période sont ensuite périodisés afin d'étendre l'observation à un ensemble de cellules périodiques. Cela permettra en particulier d'observer l'évolution spatio-temporelle des perturbations localisées initialement. Numériquement, ces perturbations localisées sont en fait approchées par des perturbations sous-harmoniques ayant comme période un grand multiple de la période de l'onde. L'onde périodique à laquelle on ajoute une perturbation discrétisée sur un maillage uniforme représente la condition initiale d'un schéma aux différences finies. Notre schéma, analogue à celui écrit par Zabusky & Kruskal [124] pour l'équation de KdV, est un schéma de saute-mouton d'ordre deux en temps et en espace, qui prend en compte des non-linéarités $p(v)$ et $\kappa(v)$ générales et étendu au cas $N = 2$.

Dans le cas $N = 1$, ce schéma s'écrit

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} + p'(v_j^n) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = \frac{1}{2\Delta x} (T_{j+1}^n - T_{j-1}^n),$$

et dans le cas $N = 2$

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + p'(v_j^n) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = \frac{1}{2\Delta x} (T_{j+1}^n - T_{j-1}^n), \end{cases}$$

où

$$T_j^n = -\frac{1}{2}\kappa'(v_j^n) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)^2 - \kappa(v_j^n) \left(\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right).$$

La résolution se fait avec des conditions aux bords périodiques.

Comme dans Zabusky & Kruskal [124], le schéma (29) n'est pas sous forme conservative. Dans leur article, ce schéma était destiné à la simulation de données initiales régulières afin d'observer la formation de trains de solitons. Dans le cadre de la simulation de chocs dispersifs, la forme non-conservative du schéma devient un réel problème car il ne permet pas de sélectionner les discontinuités admissibles au sens de la théorie des ÉDP hyperboliques (voir par exemple Bouchut [28, § 2.1 et 2.2]). Bien que la structure des discontinuités que l'on souhaite simuler soit dans une certaine mesure régularisée par la dispersion, on travaillera à partir d'une version conservative de ce schéma pour l'étude des chocs dispersifs.

La condition de stabilité énoncée par Taha & Ablowitz [117] est étendue au cas d'une non-linéarité p plus générale que celle de l'équation de KdV au chapitre 3, section 2.1.

Proposition 0.5. *La condition de stabilité du schéma (29) s'écrit dans le cas $\kappa = 1$*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left| -\frac{p'_*}{3} + \frac{1}{\Delta x^2} \right| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

où p'_* est la valeur minimale de la dérivée $p'(v)$.

Cette condition n'est pas valable dans le cas κ variable mais très souvent, les ondes dont on souhaite observer le comportement sont solutions de généralisations de l'équation de KdV pour lesquelles on considère toujours $\kappa = 1$.

Au chapitre 3, section 3, on se concentre sur l'observation de deux types de perturbation, tous deux construits à partir d'une fonction gaussienne

$$A \exp\left(\frac{-(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right),$$

et dont les différents paramètres sont réglables. Le premier type de perturbations sera localisé et consistera en une simple gaussienne ajoutée à l'une des cellules périodiques qui constituent la condition initiale. Le second type sera co-périodique. En pratique, simuler une perturbation co-périodique revient à ne plus travailler avec une concaténation de cellules périodiques mais avec une seule.

Dans le cas de l'équation de Korteweg-de Vries, on sait que l'évolution d'une perturbation localisée appliquée à une solution de référence constante fait apparaître un à plusieurs solitons ainsi qu'une « traînée » d'oscillations dont la taille décroît algébriquement en fonction du temps. Ce comportement a été mis en évidence par Zabusky et Kruskal [124] et prouvé ensuite dans [68]. L'évolution d'une perturbation localisée autour de solutions périodiques ou quasi-périodiques se passe différemment. Mikikits-Leitner [97] prouve qu'il apparaît toujours un ou plusieurs solitons ainsi qu'une ou plusieurs zones oscillatoires qui décroissent algébriquement, et que la convergence ne se fait pas vers la solution périodique

de référence mais vers une solution dite « modulée ». On cherche dans un premier temps à observer numériquement ce comportement avant de travailler sur d'autres équations comme (gKdV) ou (EKL).

L'un des résultats obtenus dans le cas d'une perturbation localisée est présenté sur la couverture de ce manuscrit. Sur ce tracé spatio-temporel des maxima de l'onde, on peut observer l'apparition d'une zone perturbée qui se propage selon différentes vitesses représentées en noir. La perturbation initiale se scinde rapidement lors de l'évolution pour agir en différents endroits. De manière remarquable, les vitesses de déplacement des perturbations correspondent aux vitesses caractéristiques des équations de Whitham associées à l'onde de référence. Le passage de la perturbation crée généralement un déphasage dans la position des extrema que l'on peut également observer.

Numériquement, à défaut de conditions aux limites artificielles adaptées à toutes les non-linéarités possibles, on ne peut observer réellement des perturbations localisées dans tout l'espace, aussi on les approche par des perturbations sous-harmoniques ayant comme période un grand multiple de la période de l'onde.

Dans le cas de perturbations co-périodiques, l'observation d'un caractère instable s'avère plus complexe que dans le cas localisé. L'instabilité en question est une instabilité spectrale liée à la pseudo-alternative décrite par le théorème 0.2. Il convient ici de préciser ce que l'on peut espérer observer lors de l'évolution des ces ondes perturbées. Notons tout d'abord que même au niveau linéaire dans le cas des ÉDO, il est difficile d'observer une différence entre un cas stable et un cas instable pour des opérateurs non-normaux. Le comportement en temps court est souvent dominé par une croissance des normes transitoires et une différence ne s'observe que sur des temps longs, voir les analyses qualitatives présentées schématiquement dans l'ouvrage de Trefethen & Embree [119, § I.1 ou encore fig. 33.3].

Par ailleurs, dans une situation instable, l'approximation linéaire n'est raisonnable que sur un temps court dépendant de la taille de la perturbation. Il faut donc partir d'une perturbation suffisamment petite pour que l'approximation linéaire soit une approximation raisonnable sur un temps suffisamment long pour que la différence de comportement de la dynamique linéaire soit notable. À ce stade, nous sommes convaincus que l'on ne pourra pas visualiser facilement ces différences de comportement et on se tourne donc vers une approche plus quantitative.

Une manière d'observer la différence entre le cas d'une onde stable et celui d'une onde instable est de mesurer dans les deux cas, une différence avec la solution non perturbée. On pourra observer l'erreur en norme $L^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ ou alors en norme $L^\infty(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$

$$E_1(t) = \left\| \frac{v_{\text{perturbée}} - v}{v} \right\|_{L^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})}, \quad E_\infty(t) = \left\| \frac{v_{\text{perturbée}} - v}{v} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})}$$

On s'intéresse au régime de la croissance temporelle de ces erreurs dont un exemple est présenté sur la figure 0.3. Cette croissance s'interprète comme un effet d'accumulation en lien avec le déphasage entre les deux solutions que l'on ne prend pas en compte. L'effet d'accumulation est naturellement plus présent en norme L^1 , ce qui est confirmé par la croissance plus faible observée pour l'erreur E_∞ . La comparaison des tendances de croissance de ces deux erreurs nous permettent d'observer le caractère stable ou instable de l'onde considérée.

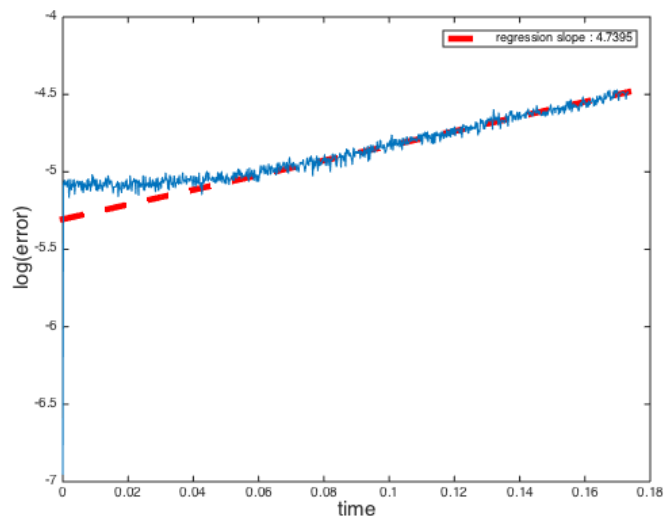


FIGURE 0.3. Erreur relative E_1 en *échelle logarithmique* entre les solutions avec et sans perturbation pour l'équation de KdV généralisée $\gamma = 4$ et en fonction du temps. L'onde considérée est spectralement instable vis-à-vis de perturbations co-périodique. L'erreur ne tient pas compte d'éventuels déphasages entre les deux solutions.

9. Chocs dispersifs

Finalement, les équations que l'on considère sont des perturbations dispersives d'ÉDP hyperboliques non-linéaires. Comme dans le cas de la régularisation par dissipation ou viscosité, on peut se demander quels sont les effets de la dispersion sur les ondes de choc de ces systèmes hyperboliques. Les *chocs dispersifs* ont une structure régulière et oscillante tout à fait particulière. Leur première observation historique s'est faite en lien avec l'hydrodynamique dispersive. On pense évidemment aux mascarets qui se produisent lorsque de fortes marées remontent le cours ou l'embouchure d'un fleuve. Depuis le début des années 2000, on a découvert des chocs dispersifs lors d'expériences en physique atomique et en optique. L'excitation d'un condensat de Bose-Einstein, milieu composé d'atomes superfroids ayant les mêmes états quantiques, par un laser pulsé forme une onde de choc dispersive, de même que la diffraction non-linéaire de la lumière. Pour une vue d'ensemble de ces applications, voir l'article de El & Hofer [52].

À partir des études de Whitham sur les modulations [121], de nombreux travaux se sont basés sur l'utilisation du système d'équations modulées pour la description de la structure des chocs dispersifs, comme ceux de El, Hofer & Shearer [50, 75, 52, 53] ou ceux de Grava & Klein [65, 66]. La première formulation de ces chocs à partir des équations modulées remonte à un travail fondateur de Gurevich & Pitaevskii [71] sur l'équation de KdV. Elle utilise l'écriture des équations de Whitham écrites sur les invariants de Riemann et l'existence de solutions analytiques de l'équation de KdV, dont on peut trouver une description complète dans l'ouvrage de Kamchatnov [82].

La structure typique d'un choc dispersif classique est illustrée sur la figure 0.4. On y distingue la *zone de Whitham* qui renferme toute la gamme d'ondes périodiques allant des ondes de faible amplitude (à gauche) au soliton (à droite). Le problème de Gurevich &

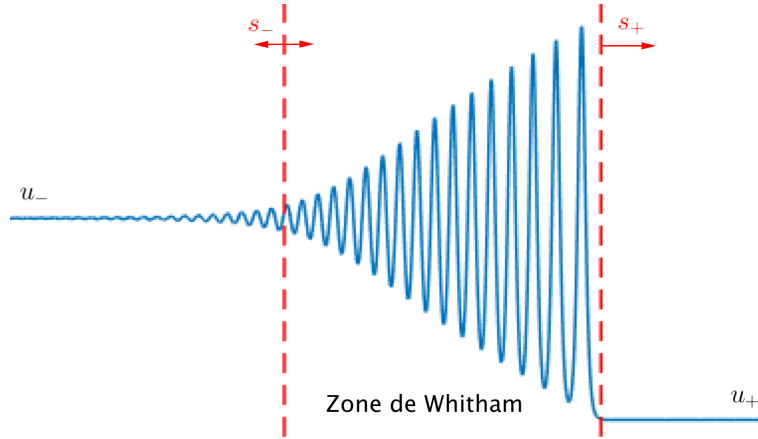


FIGURE 0.4. Structure d'un choc dispersif de l'équation de KdV $\varepsilon > 0$. Les états u_- et u_+ définissent la marche initiale. La vitesse s_- peut être positive ou négative. Elle correspond à la vitesse des ondes de faible amplitude formant l'aval du choc. La vitesse s_+ correspond à la vitesse du soliton formant l'amont du choc.

Pitaevskii [71] que l'on décrit ci-dessous consiste en particulier à déterminer les vitesses s_{\pm} d'extension de la zone de Whitham.

Pour l'équation de KdV

$$v_t + (3v^2)_x + \varepsilon v_{xxx} = 0,$$

on peut réécrire le système de Whitham associé sous forme diagonale en faisant apparaître les invariants de Riemann $r_1 \leq r_2 \leq r_3$

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + V_i(r_1, r_2, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial x},$$

où les vitesses caractéristiques $V_1 \leq V_2 \leq V_3$ dépendent des invariants de Riemann r_i , de la vitesse c et des valeurs des intégrales elliptiques de première et seconde espèce $K(m)$ et $E(m)$ avec

$$c = 2(r_1 + r_2 + r_3) \quad m = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}.$$

Les solutions périodiques de l'équation de KdV s'écrivent alors en fonction des r_i

$$(30) \quad v(t, x) = r_2 + r_3 - r_1 - 2(r_2 - r_1) \operatorname{sn}^2(\sqrt{r_3 - r_1}(x - ct + x_0), m).$$

Le déphasage initial x_0 reste indéterminé dans la théorie de Whitham telle qu'elle est décrite ici. Toute solution de l'équation de KdV est donc déterminée à translation près. L'obtention de ce déphasage initial requiert de déterminer le système modulé à un ordre plus élevé du développement asymptotique (19). Il a pu être déterminé pour certaines conditions initiales dans le cas de l'équation de KdV [52, 65].

Le problème formulé par Gurevich & Pitaevskii consiste à résoudre l'équation de KdV en considérant la donnée initiale

$$u(0, x) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases}$$

On fait l'hypothèse que la structure oscillante du choc peut être représentée par une onde modulée dont les paramètres seraient une solution particulière des équations de Whitham. Les deux extrémités de la zone définissant le choc dispersif sont constituées par une onde harmonique d'un côté et par un soliton de l'autre. L'intérieur de cette zone est représenté par un éventail complet d'ondes dont les paramètres varient entre ces deux limites, pour lesquelles $m = 0$ et $m = 1$ respectivement. L'onde à l'extérieur de la zone oscillante est

régie par l'équation de Burgers-Hopf, qui est la réduction de l'équation de KdV au cas sans dispersion.

Dans la limite harmonique, le module m s'annule, ce qui se traduit par $r_2 = r_1$, et on observe la fusion de deux des vitesses caractéristiques

$$m = 0, \quad V_2(r_1, r_2, r_3) = V_1(r_1, r_2, r_3).$$

Au contraire, dans la limite soliton on observe $r_2 = r_3$ et

$$m = 1, \quad V_2(r_1, r_2, r_3) = V_3(r_1, r_2, r_3),$$

Le problème que se sont posé Gurevich & Pitaevskii est de déterminer une solution des équations modulées $r_i(t, x)$, $i = 1, 2, 3$ dont l'onde associée $v(t, x)$ donnée par (30) représente la zone oscillante du choc dispersif. Ce problème consiste donc à déterminer une solution auto-similaire des équations de Whitham dont les conditions aux bords soient compatibles avec les états macroscopiques de l'onde définie à l'extérieur de la zone oscillante par u_{\pm} .

Dans le cas de l'équation de KdV, la stricte hyperbolicité (les vitesses V_i sont réelles et distinctes) et la vraie non-linéarité caractérisée par

$$\frac{\partial V_i}{\partial r_i} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

sont deux propriétés importantes du système de Whitham vérifiées pour $0 < m < 1$ [82] qui assurent que l'évolution de discontinuité initiale peut être représentée par une modulation auto-similaire de la solution (30) qui est une onde de détente du système de Whitham vérifiant

$$r_1 = u_+, \quad r_3 = u_-, \quad V_2(u_+, r_2, u_-) = \frac{x}{t}.$$

L'onde de détente est définie pour tous les temps $t > 0$ et on peut définir les vitesses des extrémités du choc dispersif s_- en aval (côté faible amplitude ici) et s_+ en amont (côté soliton ici). Ces deux vitesses sont obtenues en considérant donc $m = 0$ ou $m = 1$ dans l'expression de V_2

$$s_- = V_2(u_+, u_+, u_-) = 6(u_+ - \Delta), \quad s_+ = V_2(u_+, u_-, u_-) = 6(u_+ + \frac{2}{3}\Delta),$$

où $\Delta = u_- - u_+$ est le saut à travers le choc dispersif. On peut également calculer l'amplitude du soliton qui forme l'amont du choc $a_+ = 2\Delta$.

Il existe une condition d'admissibilité pour un choc dispersif. Dans le cadre actuel d'une équation scalaire avec non-linéarité convexe $p(v) = 3v^2$, cette condition s'écrit

$$s_- < p'(u_-), \quad p'(u_+) < s_+, \quad s_- < s_+.$$

Ces conditions sont l'analogie des conditions d'entropie définies dans le cadre des chocs de Lax, mais dans le cadre dispersif.

La description des chocs dispersifs de l'équation de KdV exige l'existence d'une onde simple, une détente, qui lie les états extrêmes décrits par le système de Whitham. Cela signifie que l'hyperbolicité et la vraie non-linéarité sont des propriétés indispensables à la description des chocs dispersifs simples par les équations modulées. Des travaux récents de El, Hofer & Shearer [53] s'intéressent au cas de l'équation de KdV modifiée (mKdV) pour laquelle la non-linéarité non convexe $p(v) = 4v^3$ entraîne une perte d'hyperbolicité du système de Witham. Des résultats numériques concernant cette équation et les chocs dispersifs *non-classiques* qu'elle fait apparaître sont présentés au chapitre 3, section 4.2.

L'une des motivations de cette thèse était l'étude des chocs dispersifs qui apparaissent éventuellement comme solution de systèmes non-intégrables. Pour ces équations, on ne dispose plus de solutions analytiques, ni d'écriture du système d'équations modulées sous

forme diagonale à partir d'invariants de Riemann. Dans ce cas, notre objectif était d'exploiter notre formulation du système de Whitham en variables $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ présentée dans le second chapitre de ce manuscrit et d'adapter le problème de compatibilité de Gurevich & Pitaevskii.

Cependant, la description des chocs dispersifs simples par les modulations implique le calcul d'une onde de détente du système de Whitham liant les ondes de faible amplitude au soliton. Notre écriture du système de Whitham en variable $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ n'est pas adaptée à ce problème. En effet, on rappelle que la perte d'hyperbolicité stricte du système dans la limite soliton est à l'origine d'une perte de précision numérique dans les calculs impliquant la matrice \mathbf{D} (26) qui définit le système de Whitham. Dans ces conditions, il est numériquement impossible de résoudre le problème de Gurevich & Pitaevskii pour des cas non-intégrables.

On décrit néanmoins au chapitre 3, section 4.3.2 une méthode introduite par El [50] qui permet de calculer les vitesses d'expansion de la zone de Whitham s_{\pm} à partir de la relation de dispersion des ondes dans le cas de l'équation (gKdV)

$$\omega(k, v) = k p(v) - k^3.$$

La vitesse de groupe est alors définie par

$$(31) \quad v_g(k, v) = \partial_k \omega(k, v) = p(v) - 3k^2,$$

tandis que la vitesse de phase vaut, pour $k \neq 0$

$$(32) \quad v_{\varphi}(v, k) = \frac{\omega}{k} = p(v) - k^2.$$

La vitesse des ondes harmoniques est donnée par la vitesse de groupe calculée en l'état u_{\pm} auquel ces ondes sont associées. La vitesse de l'onde solitaire est définie comme la vitesse de phase associée à l'état \pm correspondant mais elle ne peut pas être calculée par la relation (32) puisque celle-ci n'est pas valable quand $k \rightarrow 0$. L'idée est d'introduire un nombre d'onde conjugué \tilde{k} associé aux ondes périodiques admissibles par l'opposé du potentiel \mathscr{W} . Plus précisément, le soliton dont les caractéristiques sont associées à celles d'un maximum local de \mathscr{W} est vu comme une onde de faible amplitude associée à un minimum local de $-\mathscr{W}$. Cette procédure nous permet de définir la vitesse du soliton comme $\tilde{\omega}/\tilde{k}$.

Des résultats numériques sont présentés dans les cas $N = 1$ et $N = 2$. Un intérêt est porté au cas de l'équation (gKdV) $\gamma = 4$ pour laquelle notre étude de stabilité a révélé l'instabilité spectrale des ondes de grande période. On peut alors observer les étapes de formation d'un choc dispersif suivi de la destruction de la structure avant la véritable apparition des ondes de grandes périodes. Dans le cas des systèmes $N = 2$, les simulations montrent la présence de régularisations dispersives par deux ondes, un choc dispersif et une raréfaction, chacune portée par l'une des deux caractéristiques.

Les résultats numériques présentés concernent uniquement des équations semi-linéaires. Les enjeux de l'extension à des cas quasi-linéaires sont présentés à la fin du troisième chapitre de ce manuscrit.

Chapitre 1

**Problème de Cauchy pour l'équation de Korteweg-de Vries
quasi-linéaire**

Ce chapitre est la reproduction de l'article *On the well-posedness of a quasi-linear Korteweg-de Vries equation*. [96] à paraître aux Annales Mathématiques Blaise Pascal.

1. Main result

More than a century ago, D.J. Korteweg and G. de Vries proposed a model for uni-directional long water waves propagating in a channel. The so-called Korteweg-de Vries equation

$$\text{(KdV)} \quad v_t + vv_x + v_{xxx} = 0,$$

in fact derived earlier by Boussinesq, drew a lot of attention in the 1960's, when it turned out that it was *completely integrable*, see e.g. one of the seminal papers by Gardner, Green, Kruskal & Miura [58, 59] or the book by Ablowitz [1] for a modern overview.

It was soon considered in generalized forms

$$\text{(gKdV)} \quad v_t + p(v)_x + v_{xxx} = 0.$$

In particular, the *modified* KdV equation

$$\text{(mKdV)} \quad v_t + v^2v_x + v_{xxx} = 0.$$

is also completely integrable. This is not the case for more general nonlinearities. Nevertheless, (KdV) and (gKdV) have been studied by analysts for about 50 years. The state of the art regarding (KdV) is mainly due to Bona & Smith [24], Kato [86], Bourgain [29], Kenig, Ponce & Vega [88, 87] and Christ, Colliander & Tao [37]. For (gKdV), it is due mainly to Kenig, Ponce & Vega [89] and Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka & Tao [38]. Recent developments by Guo or Kishimoto can also be found in [70] and [91].

In this article, we consider a quasi-linear version of the Korteweg-de Vries equation, in which the dispersive term is not reduced to v_{xxx} . This equation is the most natural generalization of the abstract, Hamiltonian form of (gKdV), which reads

$$(33) \quad v_t = (\delta \mathcal{H}[v])_x$$

with

$$(34) \quad \mathcal{H}[v] = \frac{1}{2}\kappa(v)v_x^2 + f(v),$$

and $f'(v) = -p(v)$. Our motivation for considering this generalization comes from the so-called Euler-Korteweg system, which involves an energy of the form (34) where κ is not necessarily a constant. The link with the Euler-Korteweg system is that their travelling waves share the same governing ODE, with additional connections in the stability of their periodic waves, see [20].

Our qKdV equation (33) (34) reads in a more explicit form

$$(35) \quad \partial_t v + \partial_x(p(v)) + \partial_x \left(\sqrt{\kappa(v)} \partial_x (\sqrt{\kappa(v)} \partial_x v) \right) = 0.$$

Up to our knowledge, the Cauchy problem regarding this quasilinear equation has never been investigated. An apparently more general nonlinear KdV equation

$$v_t + f(v_{xxx}, v_{xx}, v_x, v) = 0,$$

was studied by Craig, Kappeler, & Strauss in [40] and more recently by Linares, Ponce, & Smith in [93]. However, they use a monotonicity assumption on the nonlinearity, $\partial_{v_{xx}} f(v_{xxx}, v_{xx}, v_x, v) \leq 0$, which reads $\partial_x \kappa(v) \leq 0$ for (35). Unless κ is constant, their results are thus hardly applicable to (35). Our approach is to use the *structure* of the equation instead of a monotonicity argument. Regarding quasi-linear systems of KdV

equations, some recent developments by T. Akhunov can be found in [3] in which the local well-posedness in weighted Sobolev spaces is also handled by using symmetry arguments but with local smoothing estimates. These estimates are mandatory to deal with systems of equations, but here we focus on a scalar equation. In this particular case, we will present how it is possible to make better use of the equation's structure to derive the needed energy estimates.

Of course, Eq. (35), includes the semi-linear generalized KdV equations, where $\kappa(v) = 1$ and the nonlinearity p is polynomial. In particular $p(v) = \frac{1}{2}v^2$ corresponds to the classical KdV equation and $p(v) = \frac{1}{3}v^3$ to the modified KdV equation. As said before, these two cases are known to fall into the class of integrable equations. Remarkably enough, there is a non constant κ for which (qKdV) is completely integrable, namely $\kappa(v) = \frac{\varepsilon^2}{12}(v+a)^{-3}$, with $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ and $p(v) = \frac{v^2}{2}$, see [48].

The main motivation for studying the Cauchy problem associated with Eq. (35) is that this is the prototype of a scalar equation having enough structure to be endowed with families of periodic waves without necessarily being completely integrable. The stability analysis of Hamiltonian periodic waves has been undertaken in an earlier paper [20] in a rather general framework, of which (35) is the most basic example. A local well-posedness result for the Cauchy problem is required for completing the analysis made in [20]. In the present work we use the structure of (35) to prove local well-posedness.

We focus on the local-in-time well-posedness of (qKdV) in Sobolev spaces, that is existence and uniqueness of a smooth solution v given smooth initial data v_0 , with continuity of the mapping $v_0 \mapsto v$. The most important part of the work is based on obtaining a priori estimates, using the skew-symmetric form of the leading order term and gauging techniques to control subprincipal remainders. The idea of using gauges for dispersive PDEs, introduced by Lim & Ponce in [92] and developed by Kenig, Ponce & Vega in [90] and later by S. Benzoni-Gavage, R. Danchin & S. Descombes in [15, 16], is a fairly general method to deal with subprincipal terms. By many respects this strategy echoes and parallels methods consisting in designing equivalent augmented formulations that are symmetric up to zeroth order terms, as introduced for instance in [113].

In what follows, we consider an interval $I \subset \mathbb{R}$, and solutions of (35) are sought with values in a compact subset J of I . The functions $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ and $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ are supposed to be smooth, \mathbb{R}^{+*} being the set of real positive numbers. We consider an integer k and denote by $H^k(\mathbb{R})$ the classical Sobolev space constructed on $L^2(\mathbb{R})$ as

$$H^k(\mathbb{R}) = \{v \in L^2(\mathbb{R}), \partial_x^l v \in L^2(\mathbb{R}) \text{ for all } |l| \leq k\}.$$

The inner product in $L^2(\mathbb{R})$ will be denoted for all u and v by $\langle u|v \rangle$. Our main result is the following.

Theorem 1.1. *Assume that $k \geq 4$. If $p = -f' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is \mathcal{C}^{k+1} and $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ is \mathcal{C}^{k+2} , then for all $v_0 \in H^k(\mathbb{R})$, the image of v_0 being in $J \subset\subset I$, there exists a time $T > 0$ and a unique*

$$v \in \mathcal{C}(0, T; H^k(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H^{k-3}(\mathbb{R}))$$

solution to (35) with initial data v_0 . Moreover, $v_0 \mapsto v$ maps continuously $H^k(\mathbb{R})$ into $\mathcal{C}(0, T; H^k(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H^{k-3}(\mathbb{R}))$.

Remark 1.2. From the above statement, by standard arguments one may then build maximal solutions and a close inspection of our estimates shows that the maximal lifespan is finite if and only if the H^4 norm of the solution blows up at the final time.

The proof of this theorem is based on the derivation of a priori estimates for a regularized parabolic problem. We establish these a priori estimates on smooth solutions by

taking advantage of the structure of Eq. (35). More precisely, we use the skew-symmetry of its leading order term and then gauging techniques to deal with subprincipal remainders. Regarding the existence of solutions, we shall use a fourth order parabolic regularization of (qKdV) and pass to the limit. Uniqueness and continuity of the mapping $v_0 \mapsto v$ are proved by means of a priori estimates and a technique adapted from Bona & Smith [24].

We introduce the notations $a = p' = -f''$ and $\alpha = \sqrt{\kappa}$. For convenience, we use the same notation for both functions

$$v \mapsto \alpha(v) \quad \text{and} \quad (t, x) \mapsto (\alpha \circ v)(t, x).$$

In particular, α' stands for the derivative of $\alpha(v)$ with respect to v and $\partial_t \alpha$ and $\partial_x \alpha$ for the time and space derivatives of $\alpha \circ v$. We use the same convention for the function a and all nonlinear functions of the dependent variable v , unless otherwise specified. To keep notations compact, and hopefully easier to read, we also omit all parentheses in operators. For example, the expression

$$\partial_x(\alpha(v)\partial_x(\alpha(v)\partial_x v)),$$

will just be denoted by

$$\partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x v.$$

With these conventions, Eq. (35) becomes

$$(36) \quad v_t + av_x + \partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x v = 0,$$

as far as smooth solutions are concerned.

2. A priori energy estimates in Sobolev spaces

In this section, we investigate *a priori* bounds in $H^k(\mathbb{R})$ for smooth solutions of (36) with $k \geq 4$. Following ideas from [92, 15, 16], we shall make use of the structure of the equation and of gauges, in order to cancel out bad commutators. An ideal structure that would allow a direct computation of energy estimates is

$$v_t = \text{skew-symmetric terms} + \text{zero}^{th} \text{ order terms}.$$

Taking the inner product of this kind of equation with v , we see that the skew-symmetric terms cancel out and we readily find

$$\frac{d}{dt} \|v\|_{L^2} \lesssim \|v\|_{L^2}.$$

Even if Eq. (36) has not exactly this ideal structure, the presence of first order terms can also be handled, up to an integration by parts, not directly in $L^2(\mathbb{R})$ but in higher order Sobolev spaces. If we intend to get energy estimates in higher order Sobolev spaces than $L^2(\mathbb{R})$, we had better be sure that this structure is preserved when differentiating the equation to avoid derivatives loss. In what follows, we adapt a method from Lim & Ponce [92], and use weighted Sobolev spaces, with weights also called *gauges*, to transform our equation into a convenient structure and derive a priori estimates without loss of derivatives.

2.1. Conservation of the skew-symmetric structure

Let us first focus on the leading order term in (36). When looking for an a priori estimate in $L^2(\mathbb{R})$, we compute the time derivative of $\|v\|_{L^2}$ by taking the inner product of the equation with v . On the skew-symmetric leading order term, an integration by parts yields

$$\langle \partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x v | v \rangle = - \langle \partial_x (\alpha \partial_x v) | \alpha \partial_x v \rangle = 0.$$

If we apply the differential operator ∂_x to Eq. (36), we lose the skew-symmetry property and the corresponding cancellation. Our aim is to preserve this cancellation throughout the entire differentiation process. For this purpose, we consider the weighted quantity

$$(37) \quad \forall k \geq 0, \quad v_k = (\alpha(v)\partial_x)^k v,$$

instead of $\partial_x^k v$. This quantity is well defined if v is smooth enough. If we apply the formal operator $(\partial_x(\alpha \cdot))^k$ to Eq. (36), we see that the higher order terms have the same form as in the original equation. They read $\partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x v_k$, and thus cancel out in the inner product with v_k .

Following a definition in [114] (§3.6), we call *weight* the total number of space derivatives in a monomial expression involving a function and its own derivatives. As we will see, when we compute derivatives by applying repeatedly the operator $\partial_x(\alpha \cdot)$ to Eq. (36), the coefficients of the remainders we will have to deal with will be products of polynomial functions of v and its derivatives with functions of $\alpha(v)$ or $a(v)$ and their derivatives. As a result, they are polynomials in the variables v_k with terms multiplied by functions of v but we extend the definition of weight to this kind of non-polynomial functions. The weight is merely the total number of derivatives.

Proposition 1.3. *For a smooth solution of Eq. (36), if we denote*

$$v_k = (\alpha(v)\partial_x)^k v,$$

then the equation satisfied by v_k is of the form

$$(38) \quad \partial_t v_k + a \partial_x v_k + \partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x v_k = f_k \partial_x^2 v_k + g_k \partial_x v_k + h_k,$$

where

- $f_k = f_k(v, v_1)$ *is of (homogeneous) weight 1.*
- $g_k = g_k(v, v_1, v_2)$ *is of (homogeneous) weight 2.*
- $h_k = h_k(v, v_1, \dots, v_k)$ *consists of two terms, one of (homogeneous) weight $k + 1$ and another of (homogeneous) weight $k + 3$.*

In Eq. (38), we kept a skew-symmetric leading order term in the left hand side on purpose and we gathered commutator terms in the right hand side. These are subprincipal terms because commutator terms between two differential operators of order respectively p_1 and p_2 are of order $p_1 + p_2 - 1$. *Proof.*

Eq. (38) is obtained by repeatedly applying the differential operator $\partial_x(\alpha \cdot)$, which preserves the form of the higher order terms. Indeed,

$$\partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x v_k = \partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x v_{k+1},$$

where the parentheses are omitted. We apply the differential operator $\partial_x(\alpha \cdot)$ and find the equation satisfied by $v_1 = \alpha \partial_x v$. We have

$$\partial_x(\alpha \partial_t v) = \partial_t v_1, \quad \partial_x(\alpha a \partial_x v) = a \partial_x v_1 + a' \alpha (\partial_x v)^2,$$

so that the equation satisfied by v_1 is

$$\partial_t v_1 + a \partial_x v_1 + \partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x v_1 = -\frac{a'}{\alpha} v_1^2,$$

hence $f_1 = 0$, $g_1 = 0$ and $h_1 = -\frac{a'(v)}{\alpha(v)} v_1^2$. For $k = 2$, we use the equation on v_1 and apply again the operator $\partial_x(\alpha \cdot)$. Then, we find

$$\begin{aligned} \partial_t v_2 + a \partial_x v_2 + \partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x v_2 &= -\alpha' v_1 \partial_x^2 v_2 + \left(\frac{\alpha'}{\alpha} v_2 - \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} v_1^2 \right) \partial_x v_2 \\ &\quad + \left(\frac{\alpha' a}{\alpha} - \frac{\alpha''}{\alpha} \right) v_1^3 - \frac{3\alpha'}{\alpha} v_1 v_2, \end{aligned}$$

hence $f_2 = \alpha'v_1$, $g_2 = \frac{\alpha'}{\alpha}v_2 - \frac{\alpha'^2}{\alpha^2}v_1^2$ and

$$h_2 = \left(\frac{\alpha'a'}{\alpha^2} - \frac{a''}{\alpha} \right) v_1^3 - \frac{3a'}{\alpha} v_1 v_2.$$

More generally, f_k , g_k , h_k are computed by induction for $k \geq 2$. We have

$$\partial_x(\alpha\partial_t v_k) = \partial_t v_{k+1} - \alpha' [v_t \partial_x v_k - v_x (v_k)_t],$$

where we can use Eq. (36) and (38) to write

$$\begin{aligned} \partial_t v_k = & -\frac{a}{\alpha} v_{k+1} - \alpha \partial_x^2 v_{k+1} - \frac{\alpha'}{\alpha} v_1 \partial_x v_{k+1} + \frac{f_k}{\alpha} \partial_x v_{k+1} \\ & - \frac{\alpha'}{\alpha^2} f_k v_1 v_{k+1} + \frac{g_k}{\alpha} v_{k+1} + h_k, \end{aligned}$$

and

$$v_t = -\frac{a}{\alpha} v_1 - \partial_x v_2.$$

Using that

$$\partial_x(\alpha a \partial_x v_k) = a \partial_x v_{k+1} + a' \alpha \partial_x v \partial_x v_k = a \partial_x v_{k+1} + \frac{a'}{\alpha} v_1 v_{k+1},$$

and

$$\begin{aligned} \partial_x(\alpha [f_k \partial_x^2 v_k + g_k \partial_x v_k + h_k]) &= f_k \partial_x^2 v_{k+1} \\ &+ \left(g_k + \partial_x f_k - \frac{\alpha'}{\alpha^2} f_k v_1 \right) \partial_x v_{k+1} \\ &+ \left(\partial_x g_k - \partial_x \left(\frac{\alpha'}{\alpha^2} f_k v_1 \right) \right) v_{k+1} \\ &+ \partial_x(\alpha h_k). \end{aligned}$$

we find that

$$\partial_t v_{k+1} + a \partial_x v_{k+1} + \partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x v_{k+1} = f_{k+1} \partial_x^2 v_{k+1} + g_{k+1} \partial_x v_{k+1} + h_{k+1},$$

with

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k + \alpha' v_1 \\ g_{k+1} &= g_k + \partial_x f_k - \frac{2\alpha'}{\alpha^2} f_k v_1 + \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} v_1^2 \\ (39) \quad h_{k+1} &= \alpha \partial_x h_k + \left(\partial_x g_k - \partial_x \left(\frac{\alpha'}{\alpha^2} f_k v_1 \right) \right) v_{k+1} \\ &\quad - \frac{\alpha'}{\alpha} v_1 v_{k+1} + \frac{\alpha'}{\alpha} v_{k+1} \left(\frac{\alpha'}{\alpha^2} f_k v_1^2 - \frac{g_k}{\alpha} v_1 - \partial_x v_2 \right) \end{aligned}$$

Note that these induction relations are valid for $k \geq 2$. Indeed, the last term in (39) in the formula for h_k , namely $-\frac{\alpha'}{\alpha} v_{k+1} \partial_x v_2$ involves three derivatives on v at least. For $k = 1$, this term should be gathered with the ones which define $g_{k+1} = g_2$. This is the reason why we detailed the cases $k = 1$ and $k = 2$ in the beginning of the proof. From the first induction, we deduce that for all $k \geq 1$

$$(40) \quad f_k = (k-1)\alpha'v_1 = (k-1)\alpha\partial_x \alpha.$$

This explicit expression will be useful in what follows and justifies that the coefficient f_k depends only on v and v_1 and is a polynomial in v_1 with weight one multiplied by a bounded function of v , namely $v \mapsto (k-1)\alpha'(v)$. We do not actually need the exact expression for g_k and h_k . Instead, we analyse the number of derivatives they contain, that is their *weight*, and their general form in terms of the variables v, v_1, \dots, v_k .

For $k = 2$, we have the explicit expression of g_2 which is of weight 2. For $k \geq 2$ if g_k is of weight 2 then so is g_{k+1} because

$$g_{k+1} - g_k = \partial_x f_k - \frac{2\alpha'}{\alpha^2} f_k v_1 + \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} v_1^2$$

is of weight 2, since f_k is of weight 1.

Finally, we shall prove by induction that h_k has the general form

$$(41) \quad h_k(v, v_1, \dots, v_k) = \sum_i \beta_i(v) \prod_{j=1}^k \partial_x^{\gamma_j} v,$$

where the β_i involves derivatives of both functions $v \mapsto \alpha(v)$ and $v \mapsto a(v)$ and for all j , $\gamma_j \leq k$ and the weight of each of the terms, namely $\sum_j \gamma_j$ is either $k+1$ or $k+3$. Note that in the general form (41), the γ_j are not necessarily distinct. For $k=2$ we have

$$h_2 = \left(\frac{\alpha' a'}{\alpha^2} - \frac{a''}{\alpha} \right) v_1^3 - \frac{3a'}{\alpha} v_1 v_2,$$

which is of weight 3. It is compatible with the general form (41). For $k \geq 2$, we have from Eq. (39)

$$h_{k+1} = \alpha \partial_x h_k - \frac{a'}{\alpha} v_1 v_{k+1} + r_k,$$

where r_k gathers terms of weight $k+4$, as g_k is of weight 2 and f_k is of weight 1. The term $-\frac{a'}{\alpha} v_1 v_{k+1}$ is of weight $k+2$. Now, from the form (41) and using the chain rule and the product rule, we write

$$\alpha \partial_x h_k = \alpha(v) \partial_x \left(\sum_i \beta_i(v) \prod_{j=1}^k \partial_x^{\gamma_j} v \right) = \sum_i \tilde{\beta}_i(v) \prod_{j=1}^k \partial_x^{\tilde{\gamma}_j} v,$$

where the $\tilde{\beta}_i$ also involve derivatives of both functions $v \mapsto \alpha(v)$ and $v \mapsto a(v)$ and for all j , $\tilde{\gamma}_j \leq k+1$ and the weight of each of the terms, namely $\sum_j \tilde{\gamma}_j$ is either $k+2$ or $k+4$. We see that the term $\alpha \partial_x h_k$ has the same general form as h_k , but with terms of weight $k+2$ or $k+4$. Then, if h_k has the general form (41), so it is for h_{k+1} , with weight raised by one. \square

Remark 1.4. Another way to see that h_k has the general form (41) is to see that it is made of terms of the form

$$((\alpha \circ v) \partial_x)^k (f \circ v),$$

the function f being a combination of the functions α or a and their derivatives. Combining the Faà di Bruno formula, which generalizes the chain rule, and the product rule, we see that the term h_k consists of a polynomial expression on v and its derivatives up to v_k , each term of the polynomial being multiplied by a bounded function of v .

The structure of Eq. (38) is

$$\partial_t v_k = \text{skew-symmetric terms} + \text{terms of order at most } 2.$$

In what follows, we will show how we can use *gauges* to reduce the order of these remainders. We shall start with the control of the zero order term. Then we will find an estimate for the first order term, without gauge fortunately. Finally, we will show how we can use a *suitable gauge* to control the second order term.

Remark 1.5. We will have to prove a norm equivalence between the Sobolev norm $\|v\|_{H^k}$ and the weighted norm $\|v_k\|_{L^2}$. This property will be checked at the end of this section.

Remark 1.6. To obtain Theorem 1 with $k=4$, one may think about a slightly different strategy. It is based on estimating not

$$(\alpha \circ v \partial_x)^4 v$$

— which we do by introducing some gauge — but

$$(\alpha \circ v \partial_x) \partial_t v .$$

Since $\|(\alpha \circ v \partial_x) \partial_t v\|_{L^2}^2$ is the leading order part of $\langle \partial_t v, \delta^2 \mathcal{H}[v] \partial_t v \rangle$, the subprincipal terms appearing in the latter computation may be dealt with in a gaugeless way. See Remark 1.8 for a continuation of this comparison.

2.2. Gauge estimates for subprincipal remainders

Let us first focus on the zero order term h_k . We first prove the following lemma, which is an extension of Lemma 3.6.2 in [114] to expression of order higher than one and adapted to our particular functions, that is polynomial functions with terms multiplied by bounded functions of v .

Lemma 1.7. *Let $Q(\partial_x v, \dots, \partial_x^k v)$ be an homogeneous polynomial of weight $q \in [k, 2k)$. There exists a smooth function $C_{q,k}$ such that, for all v in $H^k(\mathbb{R})$,*

$$\|Q(\partial_x v, \dots, \partial_x^k v)\|_{L^2} \leq C_{q,k} (\|\partial_x v\|_{L^\infty}, \dots, \|\partial_x^{(q-k)} v\|_{L^\infty}) \|v\|_{H^k}$$

Proof.

The proof is based on the Gagliardo-Nirenberg inequality. First, note that if $v \in H^k(\mathbb{R})$ and $q < 2k$, then for all $p \leq q - k < k$, $\partial_x^p v \in H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$. By the triangular inequality, it is sufficient to focus on a monomial expression of the form

$$Q(\partial_x v, \dots, \partial_x^k v) = \prod_{j=1}^k \partial_x^{\gamma_j} v ,$$

with for all $1 \leq j \leq k$, $\gamma_j \leq k$ satisfy $\sum_{j=1}^k \gamma_j = q$. If there are some j such that $\gamma_j \leq q - k$, then we can estimate the corresponding factors in $L^\infty(\mathbb{R})$. Now, if all the remaining factors satisfy $q - k < \gamma_j < k$, we can conclude by using the Gagliardo-Nirenberg inequality. We choose a particular l and write, for $j \neq l$

$$\|\partial_x^{\gamma_j} v\|_{L^\infty} \lesssim \|\partial_x^k v\|_{L^2}^{\theta_j} \|\partial_x^{(q-k)} v\|_{L^\infty}^{1-\theta_j} , \text{ where } \theta_j = \frac{\gamma_j - (q-k)}{k - (q-k) - 1/2} ,$$

and for $j = l$

$$\|\partial_x^{\gamma_l} v\|_{L^2} \lesssim \|\partial_x^k v\|_{L^2}^{\theta_l} \|\partial_x^{(q-k)} v\|_{L^\infty}^{1-\theta_l} , \text{ where } \theta_l = \frac{\gamma_l - (q-k) - 1/2}{k - (q-k) - 1/2} .$$

With these relations, we have

$$\theta = \sum_{\substack{j=1 \\ q-k < \gamma_j \leq k}}^k \theta_j \leq 1 ,$$

and then we are able to write

$$\|Q(\partial_x v, \dots, \partial_x^k v)\|_{L^2} \leq C_{q,k} (\|\partial_x v\|_{L^\infty}, \dots, \|\partial_x^{(q-k)} v\|_{L^\infty}) \|\partial_x^k v\|_{L^2}^\theta \|\partial_x^{(q-k)} v\|_{L^\infty}^{1-\theta} .$$

Finally, if there exists j_0 such that $\gamma_{j_0} = k$, the corresponding factor belongs to $L^2(\mathbb{R})$ and all other j satisfies $\gamma_j \leq q - k$. Then, for all $j \neq j_0$, we have $\partial_x^{\gamma_j} v \in L^\infty(\mathbb{R})$. Combining all previous cases, and using the Sobolev embedding $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$, we can write

$$\|Q(\partial_x v, \dots, \partial_x^k v)\|_{L^2} \leq C_{q,k} (\|\partial_x v\|_{L^\infty}, \dots, \|\partial_x^{(q-k)} v\|_{L^\infty}) \|v\|_{H^k} .$$

□

Recall that h_k contains two terms of weight $q = k + 1$ and $q = k + 3$. We deduced in Proposition 1.3 the general form

$$h_k(v, v_1, \dots, v_k) = \sum_i \beta_i(v) \prod_{j=1}^k \partial_x^{\gamma_j} v,$$

where the β_i are bounded functions of v on J . Then, Lemma 1.7 gives us the following estimate

$$\|h_k(v, v_1, \dots, v_k)\|_{L^2} \leq C_k(\|v\|_{L^\infty}, \dots, \|\partial_x^3 v\|_{L^\infty}) \|v\|_{H^k}.$$

Let us now focus on the first order terms $g_k \partial_x v_k$. This term brings no trouble at all as we can regroup it with the first order term in Eq. (38)

$$[a(v) - g_k(v, v_1, v_2)] \partial_x v_k.$$

When taking the inner product with v_k , we can estimate

$$\begin{aligned} \langle (a - g_k) \partial_x v_k | v_k \rangle &\leq \|\partial_x (a - g_k)\|_{L^\infty} \|v_k\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_k(\|v\|_{L^\infty}, \|v_1\|_{L^\infty}, \|v_2\|_{L^\infty}, \|v_3\|_{L^\infty}) \|v_k\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

This leaves us with the only one remaining term $f_k \partial_x^2 v_k$. This one cannot be estimated as the previous ones because it contains too many derivatives. The method we present here consists in using *gauges* in the equation, following ideas from [92].

Formally and in all generality, what we call a gauge is a general differential operator with unknown variable coefficients that cancels out ‘bad’ commutator terms when applied to the equation. The key property is that the commutator of two differential operators of order respectively p_1 and p_2 is of order $p_1 + p_2 - 1$. In our case, the equation is of leading order three, with a priori two subprincipal terms we wish to reduce to order zero. We could define a gauge of the type

$$\phi = \text{zero}^{\text{th}} \text{ term} + \text{order } (-1) \text{ term}$$

and apply it to our equation. Doing so, the two commutators with the leading order term would be of second and first order. These two new terms can be gathered with the existing ones, and, in practice, one can choose the coefficients of the gauge as solutions of ODEs, to cancel (or at least control) the subprincipal terms.

In our situation, we have already shown that the first order term can be controlled without this technique. Using this fact, we will define a particular gauge as a function

$$(42) \quad \phi_k : (v, \dots, v_k) \mapsto \phi_k(v, \dots, v_k),$$

to cancel the second order term $f_k \partial_x^2 v_k$. As we will see in the computation though, we will have to check that the arising first order term can be bounded.

Now, we multiply Eq. (38) by ϕ_k^2

$$\begin{aligned} \phi_k \partial_t (\phi_k v_k) + \phi_k a \partial_x (\phi_k v_k) + \partial_x \phi_k \alpha \partial_x \phi_k \alpha \partial_x v_k + R_k = \\ \phi_k \phi_k f_k \partial_x^2 v_k + \phi_k \phi_k g_k \partial_x v_k + \phi_k \phi_k h_k, \end{aligned}$$

where the four remaining terms are gathered in

$$\begin{aligned} R_k = \phi_k a [\phi_k, \partial_x] v_k + \phi_k [\phi_k, \partial_t] v_k + [\phi_k \phi_k, \partial_x (\alpha \cdot)] \partial_x \alpha \partial_x v_k \\ + \partial_x \alpha \phi_k [\phi_k, \partial_x] \alpha \partial_x v_k. \end{aligned}$$

We expect the first two terms to be bounded in $L^2(\mathbb{R})$ because they are of order zero. This will be checked when we find bounds on the function ϕ_k . First, we compute the commutators

$$(43) \quad \begin{aligned} [\phi_k^2, \partial_x (\alpha \cdot)] &= -2\alpha \phi_k \partial_x \phi_k, \\ [\phi_k, \partial_x] &= -\partial_x \phi_k, \\ [\phi_k, \partial_t] &= -\partial_t \phi_k. \end{aligned}$$

With these relations we are able to compute the last two terms in R_k

$$\begin{aligned} [\phi_k^* \phi_k, \partial_x(\alpha \cdot)] \partial_x \alpha \partial_x v_k &= -2\alpha^2 \phi_k (\partial_x \phi_k) \partial_x^2 v_k - 2\alpha (\partial_x \alpha) \phi_k (\partial_x \phi_k) \partial_x v_k, \\ \partial_x \alpha \phi_k^* [\phi_k, \partial_x] \alpha \partial_x v_k &= -\alpha^2 \phi_k (\partial_x \phi_k) \partial_x^2 v_k - \partial_x (\alpha^2 \phi_k (\partial_x \phi_k)) \partial_x v_k. \end{aligned}$$

As expected, these terms coming from the commutators are also subprincipal terms. We gather the coefficients of the second order terms and find an ODE on the function ϕ_k .

$$(44) \quad 3\alpha^2 (\partial_x \phi_k) + \phi_k f_k = 0.$$

Remark 1.8. To proceed with the comment of Remark 1.6, we observe that $\|\phi_4 \circ v(\alpha \circ v \partial_x)^4 v\|_{L^2} = \|\partial_x(\alpha \circ v \partial_x)^3 v\|_{L^2}$ which differs from $\|(\alpha \circ v \partial_x) \partial_t v\|_{L^2}$ — that is essentially $\|\alpha \circ v \partial_x^2(\alpha \circ v \partial_x)^2 v\|_{L^2}$ — only in some immaterial way. The advantage of using the gauge strategy to determine a correct functional — instead of deducing it directly from the Hamiltonian structure — is that it naturally generalizes to differentiation by any number of derivative, as we have just shown.

We recall that this process added some commutator terms of first order terms we have to control a posteriori. If we can prove the existence of ϕ_k satisfying the previous ODE and belonging to a suitable space, here say $W^{3,\infty}(\mathbb{R})$ for example, then we can get our a priori energy estimate by the same argument on first order terms as the one presented above.

Remark 1.9. We also need to prove a norm equivalence between the usual L^2 norm and some L^2 norm involving ϕ_k . This will be done at the end of this section.

From Eq. 40, we come back to the ODE (44) and easily find

$$(45) \quad \phi_k(v) = \alpha(v)^{-\frac{k-1}{3}}.$$

Now, with the regularity properties of the function $v \mapsto \alpha(v)$, we directly get that ϕ_k is bounded from above and away from zero. Moreover, for all $0 \leq l \leq 3$, there exists a constant C_k such that

$$\|\partial_x^l \phi_k(v)\|_{L^\infty} \leq C_k(\|v\|_{W^{3,\infty}}),$$

and

$$\|\partial_t \phi_k(v)\|_{L^\infty} \leq C_k(\|v\|_{W^{3,\infty}}).$$

Coming back to the first order terms, we check that

$$\left\| \partial_x [a(v) - g_k - 2\alpha(\partial_x \alpha) \phi_k (\partial_x \phi_k) - \partial_x (\alpha^2 \phi_k (\partial_x \phi_k))] \right\|_{L^\infty} \leq C_k(\|v\|_{W^{3,\infty}}).$$

Let us sum up *formally* what we obtained until now. At order $k > 0$, v_k satisfies Eq. (38). We define a gauge

$$\phi_k(v) = \alpha(v)^{-(k-1)/3},$$

and multiply Eq. (38) by ϕ_k^2 . This operation yields the equation satisfied by the quantity $\phi_k v_k$

$$\phi_k \partial_t (\phi_k v_k) + \partial_x \phi_k \alpha \partial_x \phi_k \alpha \partial_x v_k = \phi_k^2 \tilde{R}_k(v),$$

where the function \tilde{R}_k gathers all the subprincipal terms we are now able to estimate

$$\|\phi_k \tilde{R}_k(v)\|_{L^2} \leq C_k(\|v\|_{W^{3,\infty}}) \|\phi_k v_k\|_{L^2}.$$

This is a formal computation and we do not really get this ideal last estimate. In practice, it is not the norm $\|\phi_k v_k\|_{L^2}$ that appears but a combination of it and some norms $\|v\|_{H^k}$ with or without the gauge ϕ_k . We need to prove norm equivalences between the weighted norms we introduced up to this point.

2.3. Weighted norms equivalences

As mentioned before, the final energy estimate cannot be obtained if we do not have some norm equivalence on the quantities we are working with. More precisely, we prove the following lemma

Lemma 1.10. *Consider an integer $k \geq 1$, let J be a compact subset of $I \subset \mathbb{R}$. Let $\phi_k = \alpha^{-(k-1)/3}$ with $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ of class \mathcal{C}^{k+2} . On the one hand, there exists a constant c_k depending only J such that, for all function $v \in H^k(\mathbb{R})$ satisfying $v(t, x) \in J$ for all $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, then*

$$(46) \quad \frac{1}{c_k} \|v\|_{L^2} \leq \|\phi_k(v)v\|_{L^2} \leq c_k \|v\|_{L^2} .$$

On the other hand, if we denote $v_k = (\alpha(v)\partial_x)^k v$, there exist constants c'_k and C_{k-1} depending only on a constant $\rho > 0$ and J , such that for all function $v \in H^k(\mathbb{R})$ with $v(t, x) \in J$ for all $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ and $\|v\|_{W^{1,\infty}} \leq \rho$, then

$$(47) \quad \frac{1}{c'_k} \|v\|_{H^k}^2 \leq C_{k-1} \|v\|_{H^{k-1}}^2 + \|\phi_k v_k\|_{L^2}^2 \leq c'_k \|v\|_{H^k}^2 .$$

Proof.

The first inequalities are a direct consequence of the fact that the function α is bounded from above and below as J is compact. Regarding the second norm equivalence, we use the same scheme of proof as in Lemma 1.7 with a weight $q = k$. Using the definition of v_k , we can write

$$v_k - \alpha^k(v)\partial_x^k v = \sum_i \beta_i(v) \prod_{j=1}^k \partial_x^{\gamma_j} v ,$$

where the β_i are bounded functions on J , $\sum_{j=1}^k \gamma_j = k$ and for all j , $\gamma_j \leq k-1$. The leading order term in v_k satisfies

$$\frac{1}{c_k} \|\partial_x^k v\|_{L^2} \leq \|\alpha^k(v)\partial_x^k v\|_{L^2} \leq c_k \|\partial_x^k v\|_{L^2} .$$

By Lemma 1.7, the remaining terms are bounded by

$$\left\| v_k - \alpha^k \partial_x^k v \right\|_{L^2}^2 \leq 2q C_{k-1} (\|v\|_{W^{1,\infty}}) \|v\|_{H^{k-1}}^2 .$$

Then, we get

$$\frac{1}{c'_k} \|\partial_x^k v\|_{L^2}^2 - C_{k-1} \|v\|_{H^{k-1}}^2 \leq \|v_k\|_{L^2}^2 \leq c'_k \|\partial_x^k v\|_{L^2}^2 + C_{k-1} \|v\|_{H^{k-1}}^2 ,$$

rearranged as

$$\frac{1}{c'_k} \|\partial_x^k v\|_{L^2}^2 \leq C_{k-1} \|v\|_{H^{k-1}}^2 + \|v_k\|_{L^2}^2 \leq c'_k \|v\|_{H^k}^2 .$$

Using the inequality (46) and without renaming the constants already written for convenience, we finally obtain

$$\frac{1}{c'_k} \|v\|_{H^k}^2 \leq C_{k-1} \|v\|_{H^{k-1}}^2 + \|\phi_k v_k\|_{L^2}^2 \leq c'_k \|v\|_{H^k}^2 .$$

□

Then for all $v \in H^k(\mathbb{R})$, we consider the weighted norm $|\cdot|_k$ defined recursively by

$$(48) \quad \begin{cases} |v|_k^2 = \|\phi_k v_k\|_{L^2}^2 + C'_{k-1} |v|_{k-1}^2, & \text{for } k \geq 1, \\ |v|_0 = \|v\|_{L^2}^2. \end{cases}$$

where the constant C'_{k-1} is determined by induction. This definition leads to the following proposition.

Proposition 1.11. *For all integer $s \geq 1$, the weighted norm $|\cdot|_s$ defined by (48) is equivalent to the H^s norm. More precisely, there exists a constant c_s depending only on $\rho > 0$ and J such that for all $v \in H^s(\mathbb{R})$ with, for all $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $v(t, x) \in J$ and $\|v\|_{W^{1,\infty}} \leq \rho$, then*

$$\frac{1}{c_s} \|v\|_{H^s}^2 \leq |v|_s^2 \leq c_s \|v\|_{H^s}^2.$$

Proof.

The proof is done by induction. For $s = 1$, the result is given by the relation (47) from Lemma 1.10. For any $s > 1$, we have from (47) and the definition of $|\cdot|_s$

$$\frac{1}{c'_s} \|v\|_{H^s}^2 \leq C_{s-1} \|v\|_{H^{s-1}}^2 - C'_{s-1} |v|_{s-1}^2 + |v|_s^2 \leq c'_s \|v\|_{H^s}^2.$$

Then, we get using the induction property (48)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c'_s} \|v\|_{H^s}^2 + \left(\frac{C'_{s-1}}{c'_{s-1}} - C_{s-1} \right) \|v\|_{H^{s-1}}^2 &\leq |v|_s^2 \\ &\leq c'_s \|v\|_{H^s}^2 + (C'_{s-1} c'_{s-1} - C_{s-1}) \|v\|_{H^{s-1}}^2. \end{aligned}$$

Finally, choosing the constant C'_{s-1} such that $(C'_{s-1}/c'_{s-1} - C_{s-1}) > 0$, we obtain with new constants

$$\frac{1}{c_s} \|v\|_{H^s}^2 \leq |v|_s^2 \leq c_s \|v\|_{H^s}^2.$$

□

We are now able to give an *a priori* bound on a smooth solution of (qKdV).

Proposition 1.12. *For any integer $s \geq 4$, a smooth solution v of (qKdV) associated with the initial condition $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ satisfies*

$$(49) \quad \|v\|_{H^s} \leq C_s (\|v\|_{W^{3,\infty}}) \|v_0\|_{H^s}$$

Proof.

Let us come back to the equation satisfied by $\phi_k v_k$. Using what we have done previously, the second order terms cancel out and we can rearrange the remaining terms in the following way

$$\phi_k \partial_t (\phi_k v_k) + \partial_x \phi_k \alpha \partial_x \phi_k \alpha \partial_x v_k = \phi_k^2 \tilde{R}_k(v),$$

where the function \tilde{R}_k gathers all the subprincipal terms we are now able to estimate

$$\|\tilde{R}(v)\|_{L^2} \leq C_k (\|v\|_{W^{3,\infty}}) (\|\phi_k v_k\|_{L^2} + \|v\|_{H^k}).$$

Taking the inner product with v_k , we obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi_k v_k\|_{L^2}^2 = \left\langle \phi_k \tilde{R}_k^k | \phi_k v_k \right\rangle,$$

and then, using Lemma 1.10, we find some constant C_k such that

$$\frac{d}{dt} \|\phi_k v_k\|_{L^2}^2 \leq C_k (\|v\|_{W^{3,\infty}}) (\|\phi_k v_k\|_{L^2} + \|v\|_{H^k}) \|\phi_k v_k\|_{L^2}.$$

Now, from the Proposition 1.11, without renaming the constants for convenience and by summing the last inequalities for $s \geq k \geq 1$, each one being multiplied by the suitable

constant, we get

$$(50) \quad \frac{d}{dt} |v|_s^2 \leq \max_k \{C_k(\|v\|_{W^{3,\infty}})\} \|v\|_{H^s}^2$$

Integrating and calling the maximal constant C , we get

$$|v(t, \cdot)|_s^2 \leq |v_0|_s^2 + \int_0^t C(\|v(\tau, \cdot)\|_{W^{3,\infty}}) \|v(\tau, \cdot)\|_{H^s}^2 d\tau.$$

Finally, using Proposition 1.11, we write

$$\|v(t, \cdot)\|_{H^s}^2 \leq c_s \left(|v_0|_s^2 + \int_0^t C(\|v(\tau, \cdot)\|_{W^{3,\infty}}) \|v(\tau, \cdot)\|_{H^s}^2 d\tau \right).$$

We finish the proof by Gronwall's lemma. \square

3. Existence of a smooth solution

This section is devoted to the proof of local well-posedness for (qKdV). We first state the existence and uniqueness of a smooth solution to a parabolic regularized equation with regularized initial data. Then, using uniform a priori bounds in large norms on this smooth solution, we take a limit to prove the existence of solutions to (qKdV). Here, we shall adapt a method by Bona & Smith [24] and prove directly that the convergence occurs in the very space $\mathcal{C}(0, T; H^s(\mathbb{R}))$ and check uniqueness and continuity of the solution map with respect to the initial data.

3.1. Study of a regularized equation

Let us introduce a *small* parameter $\varepsilon > 0$. For now, we consider the regularized parabolic equation

$$(51) \quad v_t + av_x + \partial_x \alpha \partial_x \alpha \partial_x v + \varepsilon^4 \partial_x^4 v = 0.$$

Let χ be a function of class \mathcal{C}^∞ such that its Fourier transform is compactly supported and equals 1 in a neighborhood of the origin and η in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ a non decreasing function with limit 0 at 0 that will be specified later in the proof. Denote

$$\chi_\varepsilon = \frac{1}{\eta(\varepsilon)} \chi \left(\frac{\cdot}{\eta(\varepsilon)} \right).$$

Given $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$, we define a regularized initial data by

$$(52) \quad v_{0,\varepsilon} = \chi_\varepsilon * v_0.$$

Regarding the existence of a unique solution to (51) with initial data $v_{0,\varepsilon}$, we refer to results on analytic semigroups of semi-linear PDEs in [94] (§7.3.2) and [103] (§8.4) combined with semigroup techniques in [15, 16]. More precisely, in their work on the Euler-Korteweg system, S. Benzoni-Gavage, R. Danchin, S. Descombes used a similar fourth order regularization to prove the local existence of solutions of linear problems with variable coefficients with a time of existence independent of ε . They use properties of the analytic semigroup generated by ∂_x^4 and the Duhamel formula to prove the existence and uniqueness by a fixed point method. Their technique can be directly applied to our semi-linear regularized problem (51). Thus Eq. (51) has a unique solution belonging to $\mathcal{C}(0, T; H^\infty(\mathbb{R}))$, with a time of existence $T > 0$ depending on the initial data v_0 and ε .

Then, we consider a sequence of smooth solutions $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. To take a limit when ε tends to zero, we have to justify that the time of existence of the solution may be bounded from below independently of ε . We look for uniform a priori bounds on the solution v_ε using

the techniques presented in the above section. We differentiate Eq. (51) by respecting the skew-symmetry of the third order term and use a gauge to cancel remainders. After those two operations, we get that, for all $k \geq 0$

$$(53) \quad \phi_k \partial_t(\phi_k v_k) + \partial_x \phi_k \alpha \partial_x \phi_k \alpha \partial_x v_k + \phi_k \varepsilon^4 \partial_x^4(\phi_k v_k) = \phi_k^2 \tilde{R}_k + \varepsilon^4 \phi_k^2 R_\varepsilon,$$

where the term \tilde{R}_k contains all previous zero order remainders and the term R_ε is a commutator term arising from the fourth order regularization. To deal with this new commutator term, we first prove the following lemma

Lemma 1.13. *Let $Q(v, \partial_x v, \dots, \partial_x^{k+2p} v)$ be an homogeneous polynomial of weight $k+2p \in [k, 2k]$ with terms multiplied by bounded functions of v . There exists a constant $\mu > 0$ such that for all $v \in H^k(\mathbb{R})$ and for all small $\varepsilon > 0$,*

$$\varepsilon^{2p} \left\langle Q(v, \partial_x v, \dots, \partial_x^{k+2p} v) | \partial_x^k v \right\rangle \leq C_\mu \|v\|_{H^k}^2 + \varepsilon^{2p} \mu \|\partial_x^{k+p} v\|_{L^2}^2.$$

Proof.

The proof uses that of Lemma 1.7. A general form of Q is

$$Q(v, \partial_x v, \dots, \partial_x^{k+2p} v) = \sum_i \beta_i(v) \prod_{j=1}^k \partial_x^{\gamma_j} v,$$

where the β_i are bounded on J and for all $1 \leq j \leq k$, $\gamma_j \leq k+2p$ satisfy $\sum_{j=1}^k \gamma_j = k+2p$. First, we take the inner product with $\partial_x^k v$ and use an integration by parts to get an expression of the form

$$\left\langle P(v, \partial_x v, \dots, \partial_x^{k+p} v) | \partial_x^{k+p} v \right\rangle$$

Now, thanks to the triangular inequality, it is sufficient to work on a monomial expression. Without changing notations for convenience, we consider

$$P(v, \partial_x v, \dots, \partial_x^{k+p} v) = \prod_{j=1}^k \partial_x^{\gamma_j} v.$$

where for all $1 \leq j \leq k$, $\gamma_j \leq k+p$ satisfy $\sum_{j=1}^k \gamma_j = k+p$.

If for all j , $\gamma_j \leq k$, we proceed exactly as in Lemma 1.7 to get

$$\left\langle P | \partial_x^{k+p} v \right\rangle \lesssim \|v\|_{H^k} \|\partial_x^{k+p} v\|_{L^2}.$$

Now, if there is a factor with $k < \gamma_l \leq k+p$, we use the again Gagliardo-Nirenberg inequality. We know there could be only one because $p \leq k/2$.

$$\|\partial_x^{\gamma_l} v\|_{L^2} \lesssim \|\partial_x^{k+p} v\|_{L^2}^\theta \|\partial_x^k v\|_{L^2}^{1-\theta}, \text{ where } \theta = \frac{\gamma_l - k}{p} < 1.$$

Finally, combining with previous terms, we have by Young's inequality

$$\|P(v, \partial_x v, \dots, \partial_x^{k+p} v)\|_{L^2} \lesssim \|v\|_{H^k}^{1-\theta} \|\partial_x^{k+p} v\|_{L^2}^\theta \lesssim C_\mu \|v\|_{H^k} + \mu \|\partial_x^{k+p} v\|_{L^2}.$$

Now, returning to our first polynomial expression

$$\left\langle P(v, \partial_x v, \dots, \partial_x^{k+2p} v) | \partial_x^k v \right\rangle \leq \left(C_\mu \|v\|_{H^k} + \mu \|\partial_x^{k+p} v\|_{L^2} \right) \|\partial_x^{k+p} v\|_{L^2}.$$

Using another time Young's inequality, we find new constants μ' and $C_{\mu'}$ such that

$$\left\langle P(v, \partial_x v, \dots, \partial_x^{k+2p} v) | \partial_x^k v \right\rangle \leq C_{\mu'} \|v\|_{H^k}^2 + \mu' \|\partial_x^{k+p} v\|_{L^2}^2.$$

To conclude the proof, we multiply by the bounded factor ε^{2p} and find the constant μ to be the maximum of the μ' obtained for the various monomials P . \square

Let us now come back to the regularized equation (51), and prove the following proposition.

Proposition 1.14. *Let $v_0 \in H^q(\mathbb{R})$ with $q \geq 4$. For $s \geq q$, the unique solution of (51) with regularized initial data $v_{0,\varepsilon}$ defined in (52) satisfies*

$$\|v(t, \cdot)\|_{H^s} \lesssim \frac{\|v_0\|_{H^q}}{\eta(\varepsilon)^{s-q}}.$$

Proof.

We follow the steps of proof of Proposition 1.12. We first take the inner product of (57) with v_k to obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi_k v_k\|_{L^2}^2 + \|\varepsilon^2 \partial_x^2 (\phi_k v_k)\|_{L^2}^2 = \langle \phi_k \tilde{R} | \phi_k v_k \rangle + \varepsilon^4 \langle \phi_k R_\varepsilon | \phi_k v_k \rangle.$$

Using the techniques of the previous section and the result of lemma 1.13, we obtain by choosing the Young's inequality constant such that $\mu < 1/2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi_k v_k\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\varepsilon^2 \partial_x^2 (\phi_k v_k)\|_{L^2}^2 &\leq C_\infty \|\phi_k v_k\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C_k (\|v\|_{L^\infty}, \|v_1\|_{L^\infty}) \|v\|_{H_k} \|\phi_k v_k\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Now, summing on $1 \leq k \leq s$ and multiplying by the suitable constants C_k at each step,

$$\frac{d}{dt} |v|_s^2 + c \sum_{k=1}^s \|\varepsilon^2 \partial_x^2 (\phi_k v_k)\|_{L^2}^2 \leq \max_k C_k \|v\|_{H^s}^2.$$

By integration with respect to time

$$|v(t, \cdot)|_s^2 + \int_0^t c \sum_{k=1}^s \|\varepsilon^2 \partial_x^2 (\phi_k v_k)\|_{L^2}^2 d\tau \leq |v_0|_s^2 + \int_0^t C \|v\|_{H^s}^2 d\tau.$$

Finally,

$$\|v(t, \cdot)\|_{H^s}^2 + c_s \int_0^t c \sum_{k=1}^s \|\varepsilon^2 \partial_x^2 (\phi_k v_k)\|_{L^2}^2 d\tau \leq c_s \left(|v_0|_s^2 + \int_0^t C \|v\|_{H^s}^2 d\tau \right).$$

This last estimate and the norm equivalence give in particular

$$\|v(t, \cdot)\|_{H^s}^2 \lesssim \|v_0\|_{H^s}^2 + \int_0^t C \|v\|_{H^s}^2 d\tau.$$

A classical mollifier property from appendix C in [16] gives us

$$\|v_0\|_{H^s} \leq C \frac{\|v_0\|_{H^q}}{\eta(\varepsilon)^{s-q}}.$$

We finish the proof by Gronwall's lemma. \square

In particular, for initial data $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$, we get a uniform bound of the solution in $H^s(\mathbb{R})$ for any $s \geq 4$, that is independent of ε . In the proof by S. Benzoni-Gavage, R. Danchin, S. Descombes in [15], this uniform estimate is actually used directly in the fixed point argument to justify that the time of existence of the solution v_ε is independent of the regularization parameter ε . Here we obtain this uniformity a posteriori. From now on, we denote by $T > 0$ the minimal common time of existence of all the solutions in the sequence $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ depending only on v_0 .

3.2. Convergence to a solution of (qKdV)

From our regularized equations, we have a sequence of solutions $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ belonging to $\mathcal{C}(0, T; H^\infty(\mathbb{R}))$ for some $T > 0$ given the same initial data $v_{0,\varepsilon}$ regularized from $v_0 \in H^q(\mathbb{R})$, $q \geq 4$ for all the sequence. We shall prove that this sequence is a Cauchy sequence in $\mathcal{C}(0, T; H^s(\mathbb{R}))$ for any $s \geq q \geq 4$.

For $0 < \delta \leq \varepsilon$, we denote by v_ε and v_δ the two corresponding solutions of (51) and we look for estimates on $z = v_\varepsilon - v_\delta$. Then, our goal is to prove that $\|z\|_{L^\infty(0, T; H^s(\mathbb{R}))}$ goes to zero when ε and δ go to zero. We compute the difference between the two equations on v_ε and v_δ to find

$$\begin{aligned} z_t + a(v_\delta)z_x + \partial_x \alpha(v_\delta) \partial_x \alpha(v_\delta) \partial_x z + \delta^4 \partial_x^4 z &= (\varepsilon^4 - \delta^4) \partial_x^4 v_\varepsilon \\ &+ (a(v_\delta) - a(v_\varepsilon)) \partial_x v_\varepsilon \\ &+ \partial_x \alpha(v_\delta) \partial_x \alpha(v_\delta) \partial_x v_\varepsilon \\ &- \partial_x \alpha(v_\varepsilon) \partial_x \alpha(v_\varepsilon) \partial_x v_\varepsilon. \end{aligned}$$

We rewrite it in a more compact way

$$(54) \quad z_t + \tilde{a}_{\varepsilon, \delta} z_x + \partial_x \left(\frac{1}{2} \alpha_\varepsilon^2 \right) z_{xx} + \partial_x \alpha_\delta \partial_x \alpha_\delta \partial_x z + \delta^4 \partial_x^4 z = (\varepsilon^4 - \delta^4) \partial_x^4 v_\varepsilon + F_{\varepsilon, \delta}(z),$$

with obvious notations. $F_{\varepsilon, \delta}$ is a linear function with respect to z of homogeneous weight 3 and

$$\tilde{a}_{\varepsilon, \delta} = \tilde{a}_{\varepsilon, \delta}(v_\varepsilon, \partial_x v_\varepsilon, \partial_x^2 v_\varepsilon, v_\delta, \partial_x v_\delta, \partial_x^2 v_\delta).$$

In this last formulation, we gathered all the subprincipal terms. Again, the first order one can be estimated by a direct computation since $\partial_x \tilde{a}_{\varepsilon, \delta}$ belongs to $L^\infty(\mathbb{R})$ according to the estimate on the solutions v_ε and v_δ . Moreover, to take the limit, we will need estimates on low derivatives of the difference z to compensate the loss involved by the high derivatives in v_ε . More precisely, the arising of terms with too many derivatives on the coefficients v_ε forces us to use estimates given by Proposition 1.14 and then concede an inverse factor of ε . To recover this factor we shall prove that a low number of derivatives on the difference $z = v_\varepsilon - v_\delta$ can compensate this loss in ε . Then, we shall prove the following lemma

Lemma 1.15. *For $0 < \delta \leq \varepsilon$, let v_ε (respectively v_δ) denote the smooth solutions of (51) with parameter ε (respectively δ) and regularized initial data $v_{0,\varepsilon}$ (respectively $v_{0,\delta}$) with $v_0 \in H^q(\mathbb{R})$ and $q \geq 4$. Then, for all $0 \leq p \leq q$,*

$$\|\partial_x^p (v_\varepsilon - v_\delta)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}))} = o(\eta(\varepsilon)^{q-p})$$

when ε goes to zero.

Proof.

To get these new estimates, we start by looking for an estimate in $L^2(\mathbb{R})$ and then in $H^q(\mathbb{R})$. The structure of Eq. (54) is obviously different from the one we have worked with previously. In fact, it is principally the arising of the second order term $\partial_x \left(\frac{1}{2} \alpha_\varepsilon^2 \right) z_{xx}$ which causes troubles. Again, we use a *gauge* $\phi_{\varepsilon, \delta}$ to deal with this term and multiply the equation by $\phi_{\varepsilon, \delta}^2$. Exactly as before, by computing commutators we find

$$(55) \quad \begin{aligned} \phi_{\varepsilon, \delta} \partial_t (\phi_{\varepsilon, \delta} z) &+ \phi_{\varepsilon, \delta} \tilde{a}_{\varepsilon, \delta} \partial_x (\phi_{\varepsilon, \delta} z) &+ \partial_x \alpha_\delta \phi_{\varepsilon, \delta} \partial_x \alpha_\delta \phi_{\varepsilon, \delta} \partial_x z \\ &+ \delta^4 \phi_{\varepsilon, \delta} \partial_x^4 (\phi_{\varepsilon, \delta} z) \\ &= \phi_{\varepsilon, \delta}^2 (\varepsilon^4 - \delta^4) \partial_x^4 v_\varepsilon &+ \phi_{\varepsilon, \delta}^2 \tilde{F}_{\varepsilon, \delta}(z) \\ &+ \delta^4 \phi_{\varepsilon, \delta} [\phi_{\varepsilon, \delta}, \partial_x^4] z. \end{aligned}$$

In the previous expression, we have already used the cancellation due to our gauge and the remainders of order zero are gathered in the term $\tilde{F}_{\varepsilon,\delta}$. As before, the ODE the gauge has to satisfy is

$$3\alpha_\delta^2 \phi_{\varepsilon,\delta} \partial_x \phi_{\varepsilon,\delta} = -\phi_{\varepsilon,\delta}^2 \partial_x \left(\frac{1}{2} \alpha_\varepsilon^2 \right).$$

To solve this last equation, we rewrite it as

$$(56) \quad \frac{\partial_x \phi_{\varepsilon,\delta}}{\phi_{\varepsilon,\delta}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial_x \alpha_\varepsilon}{\alpha_\varepsilon} - \frac{\partial_x (\alpha_\varepsilon^2)}{6} \left(\frac{1}{\alpha_\delta^2} - \frac{1}{\alpha_\varepsilon^2} \right).$$

The first part of the right hand side is directly integrable and causes no trouble and the second part belongs to $L^1(\mathbb{R})$. This yields that $\phi_{\varepsilon,\delta}$ exists and belongs to $L^\infty(\mathbb{R})$ and thus, from Eq. (56), we can ensure that for $0 \leq l \leq 3$

$$\partial_x^l \phi_{\varepsilon,\delta} \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Moreover, using the equations satisfied by v_ε and v_δ and the estimates we have for both of them, we find by a Gagliardo-Nirenberg inequality

$$\begin{aligned} \|\partial_t \phi_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty} &\lesssim C + (\varepsilon^4 \|\partial_x^5 v_\varepsilon\|_{L^\infty} + \delta^4 \|\partial_x^5 v_\delta\|_{L^\infty}), \\ &\lesssim C + \frac{\varepsilon^4}{\eta(\varepsilon)^{3/2}} + \frac{\delta^4}{\eta(\delta)^{3/2}}, \\ &\leq C, \end{aligned}$$

for a well chosen function η . Those properties justify that all the remainders from commutators gathered in $\tilde{F}_{\varepsilon,\delta}$ are bounded in $L^2(\mathbb{R})$ as the gauge and all its derivatives arising in the computation are bounded in $L^\infty(\mathbb{R})$. So the adding of this gauge does not change anything from what was done in the previous section, especially regarding the norm equivalences.

There are two terms left to control. The first one

$$\delta^4 \phi_{\varepsilon,\delta} [\phi_{\varepsilon,\delta}, \partial_x^4] z$$

is treated using the same scheme of proof as in Lemma 1.13. By the Gagliardo-Nirenberg inequality and the estimates on $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, we get constants $\mu > 0$ and C_μ such that

$$\delta^4 \langle \phi_{\varepsilon,\delta} [\phi_{\varepsilon,\delta}, \partial_x^4] z | z \rangle \leq \delta^4 C_\mu \|v_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \delta^4 \mu \|\partial_x^2 z\|_{L^2}^2$$

For the second one, we write

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\varepsilon,\delta} (\varepsilon^4 - \delta^4) \partial_x^4 v_\varepsilon | \phi_{\varepsilon,\delta} z \rangle &\lesssim \varepsilon^4 \|\partial_x^4 v_\varepsilon\|_{L^2} \|\phi_{\varepsilon,\delta} z\|_{L^2} \\ &\lesssim \frac{\varepsilon^4}{\eta(\varepsilon)^{4-q}} \|v_0\|_{H^q} \|\phi_{\varepsilon,\delta} z\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Finally, choosing Young's inequality constant such that $\mu < 1/2$, the estimate we get by taking the inner product of eq. (55) with z is

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi_{\varepsilon,\delta} z\|_{L^2}^2 + \frac{\delta^4}{2} \|\partial_x^2 (\phi_{\varepsilon,\delta} z)\|_{L^2}^2 \leq C \|\phi_{\varepsilon,\delta} z\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon^4}{\eta(\varepsilon)^{4-q}} \|v_0\|_{H^q} \|\phi_{\varepsilon,\delta} z\|_{L^2}.$$

An integration in time and Gronwall's lemma yield

$$\|\phi_{\varepsilon,\delta} z(t)\|_{L^2} \leq \|\phi_{\varepsilon,\delta} z(0)\|_{L^2} + \frac{\varepsilon^4}{\eta(\varepsilon)^{4-q}} \|v_0\|_{H^q}.$$

A classical property on mollifiers, again from appendix C of [16], and norm equivalences finally give

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))} = o(\eta(\varepsilon)^q) + \frac{\varepsilon^4}{\eta(\varepsilon)^{4-q}} = o(\eta(\varepsilon)^q),$$

for a suitable choice of η , namely

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon^\beta$$

with $\beta < 1$.

This last relation yields the desired estimate in $L^2(\mathbb{R})$. Let us now focus on the property in $H^q(\mathbb{R})$. To do this, we need to differentiate the equation q times using again our differential operator $\alpha(v_\delta)\partial_x$ and the corresponding gauge $\phi_q(v_\delta)$ from the previous section. We recall that z satisfies

$$z_t + \tilde{a}_{\varepsilon,\delta} z_x + \partial_x \left(\frac{1}{2} \alpha_\varepsilon^2 \right) z_{xx} + \partial_x \alpha_\delta \partial_x \alpha_\delta \partial_x z - \delta^4 \partial_x^4 z = (\varepsilon^4 - \delta^4) \partial_x^4 v_\varepsilon + F_{\varepsilon,\delta}(z),$$

The total gauge we will use is $\Phi_q = \phi_q(v_\delta)\phi_{\varepsilon,\delta}$. Then, exactly as before, differentiating q times, multiplying by Φ_q^2 and computing commutators

$$\begin{aligned} (57) \quad & \Phi_q \partial_t (\Phi_q z_q) + \Phi_q \tilde{a}_{\varepsilon,\delta} \partial_x (\Phi_q z_q) + \partial_x \alpha_\delta \Phi_q \partial_x \alpha_\delta \Phi_q \partial_x z_q \\ & + \delta^4 \Phi_q \partial_x^4 \Phi_q z_q \\ & = \Phi_q^2 \tilde{F}_{\varepsilon,\delta}(z, \dots, z_q) + \delta^4 \Phi_q [\Phi_q, \partial_x^4] z_q \\ & + \delta^4 (\Phi_q)^2 [(\partial_x(\alpha_\delta \cdot))^q, \partial_x^4] z \\ & + \Phi_q^2 (\varepsilon^4 - \delta^4) (\partial_x(\alpha_\delta \cdot))^q \partial_x^4 v_\varepsilon. \end{aligned}$$

In this last expression, we have already used cancellations from the gauges and the term $\tilde{F}_{\varepsilon,\delta}$ contains all the remainders of commutators we have encountered before. This term involves up to $q+3$ derivatives on v_ε and up to q derivatives on v_δ and will have to be estimated again to make sure it remains bounded uniformly in ε . In the following we deal with the four terms in the right hand side.

Let us deal first with the second one. This term is the same as in the L^2 case treated previously and we will later set Young's inequality constant to control it.

For the third one, we use directly the lemma 1.13 with $k=4$ and $p=2$ to get that there exists constants $\mu > 0$ and C_μ such that

$$\delta^4 \langle [(\partial_x(\alpha_\delta \cdot))^q, \partial_x^4] z | z_q \rangle \lesssim C_\mu \|z\|_{H^q}^2 + \delta^4 \mu \|\partial_x^2 z_q\|_{L^2}^2.$$

We rewrite the last term as

$$\Phi_q^2 (\varepsilon^4 - \delta^4) (\partial_x((\alpha_\delta - \alpha_\varepsilon) \cdot))^q \partial_x^4 v_\varepsilon + \Phi_q^2 (\varepsilon^4 - \delta^4) (\partial_x(\alpha_\varepsilon \cdot))^q \partial_x^4 v_\varepsilon.$$

In the first part, it appears at most order q derivatives of z and order $q+4$ derivatives of v_ε . We rewrite it as a sum of terms of the general form

$$(\varepsilon^4 - \delta^4) \partial_x^q z \partial_x^{q+4-l} v_\varepsilon,$$

with $0 \leq l \leq q$. Using a bootstrap argument, we get the estimate

$$(\varepsilon^4 - \delta^4) \|\partial_x^l z \partial_x^{q+4-l} v_\varepsilon\|_{L^2} \lesssim \varepsilon^4 \|\partial_x^q z\|_{L^2} \|\partial_x^{q+4-l} v_\varepsilon\|_{L^\infty},$$

with

$$\varepsilon^4 \|\partial_x^q z\|_{L^2} \|\partial_x^{q+4-l} v_\varepsilon\|_{L^\infty} = \frac{o(\eta(\varepsilon)^{q-l}) \varepsilon^4}{\eta(\varepsilon)^{(4-l)/2 + (5-l)/2}} = o(1).$$

For the second part of this last term, the term which has the worst possible loss of derivative is

$$(\varepsilon^4 - \delta^4) v_\varepsilon \partial_x^{q+4} v_\varepsilon.$$

In this case, we estimate as before

$$(\varepsilon^4 - \delta^4) \|v_\varepsilon \partial_x^{q+4} v_\varepsilon\|_{L^2} \lesssim \frac{\varepsilon^4}{\eta(\varepsilon)^4} = o(1),$$

with our definition of the function η . This final estimate proves that the last term in eq. (57) goes to zero when ε goes to zero.

We are left with $\tilde{F}_{\varepsilon,\delta}$, which we rewrite in general form

$$\sum_i \beta_i(v_\varepsilon, v_\delta, z) \prod_{j,l,m} \partial_x^{\gamma_j} v_\varepsilon \partial_x^{\gamma_l} v_\delta \partial_x^{\gamma_m} z,$$

where for all j, l and m , $\gamma_j \leq q + 3$, $\gamma_l \leq q$, $\gamma_m \leq q$ and

$$\sum_{j,l,m} \gamma_j + \gamma_l + \gamma_m = q + 3.$$

If $\gamma_j \leq q$ then the Gagliardo-Nirenberg inequality gives us our estimate as $3 \leq \gamma_m \leq q$ and there is no loss in $1/\eta(\varepsilon)$ involved. The issue occurs when there is more than q derivatives on either v_ε . In this case, $\gamma_l \leq 3$ and the corresponding factors are bounded in L^∞ . Then, we write for $1 \leq l \leq 3$

$$\|\partial_x^{q+3-l} v_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\partial_x^l z\|_{L^2} = \frac{o(\eta(\varepsilon)^{q-l})}{\eta(\varepsilon)^{3+1/2-l}} = o(1).$$

Finally, let us gather all we have done before. We take the inner product of Eq. (57) by z_q and, gathering all Young's inequalities constants such that their sum is less than $1/2$, we can write

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Phi_q z_q\|_{L^2}^2 + \frac{\delta^4}{2} \|\partial_x^2(\Phi_q z_q)\|_{L^2}^2 \lesssim \|\Phi_q z_q\|_{L^2}^2 + F(\varepsilon) \|\Phi_q z_q\|_{L^2},$$

where we gathered in $F(\varepsilon) = o(1)$ all the previously treated terms. Gronwall's lemma yields

$$(58) \quad \|\Phi_q z_q(t, \cdot)\|_{L^2} \lesssim \|\Phi_q z_q(0, \cdot)\|_{L^2} + F(\varepsilon),$$

and with mollifiers properties

$$\|\Phi_q z_q\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))} = o(1).$$

Together with $\|\phi_{\varepsilon,\delta} z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))}^2 = o(\eta(\varepsilon)^q)$, we complete the proof by interpolation and norm equivalences. \square

Corollary 1.16. *The sequence $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{C}(0, T; H^s(\mathbb{R}))$ for any $s > 3 + 1/2$. Then, its limit $v \in \mathcal{C}(0, T; H^s(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H^{s-3}(\mathbb{R}))$ is a solution to $(qKdV)$ with initial data v_0 .*

4. Uniqueness and continuity with respect to the data

4.1. Uniqueness and continuity with respect to the data

As announced, here we adapt a technique originally introduced by Bona & Smith in [24] and later exploited in many papers, see [13, 15, 16] for example. We prove the following theorem

Theorem 1.17. *For an integer $s \geq 4$, let K be a strictly positive constant. For all $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ of norm not greater than K , the mapping*

$$\begin{aligned} H^s(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}(0, T; H^s(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1(0, T, H^{s-3}(\mathbb{R})) \\ v_0 &\mapsto v, \quad \text{solution of } (qKdV) \text{ with initial data } v_0 \end{aligned}$$

is continuous.

Proof.

We aim at proving that for any sequence of initial conditions $(v_0^n)_{n \geq 0}$ going to v_0 in $H^s(\mathbb{R})$,

then the corresponding sequence of solutions $(v^n)_{n \geq 0}$ goes to v , the solution corresponding to the initial data v_0 . We start by writing

$$\|v^n - v\|_{H^s} \leq \|v^n - v_\varepsilon^n\|_{H^s} + \|v_\varepsilon^n - v_\varepsilon\|_{H^s} + \|v_\varepsilon - v\|_{H^s}.$$

We first focus on the first and third terms. Let us rewrite what we obtained in (58). For $\varepsilon \geq \delta > 0$, using norm equivalences and taking the limit $\delta \rightarrow 0$, we get

$$(59) \quad \|v_\varepsilon(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{H^s} \leq C_K (\|v_{\varepsilon,0} - v_0\|_{H^s} + F(\varepsilon)),$$

where $F(\varepsilon)$ goes to zero when ε goes to zero. This kind of estimate is also true for the difference between the solutions v_ε^n and v^n

$$(60) \quad \|v_\varepsilon^n(t, \cdot) - v^n(t, \cdot)\|_{H^s} \leq C_K (\|v_{\varepsilon,0}^n - v_0^n\|_{H^s} + F(\varepsilon)).$$

Moreover, we have

$$(61) \quad \begin{aligned} \|v_{\varepsilon,0}^n - v_0^n\|_{H^s} &\leq \|v_{\varepsilon,0}^n - v_{\varepsilon,0}\|_{H^s} + \|v_{\varepsilon,0} - v_0\|_{H^s} + \|v_0 - v_0^n\|_{H^s}, \\ &\leq 2\|v_0^n - v_0\|_{H^s} + \|v_{\varepsilon,0} - v_0\|_{H^s}. \end{aligned}$$

Now for the second term, we have to revisit the proof of Proposition 1.15 and more precisely the way we obtained estimate (58). Here, we have to estimate the difference between two solutions with same regularization parameter ε , but which satisfy the same regularized equation with different initial data. We proceed exactly the same way with some cancellations due to the fact that we actually take $\delta = \varepsilon$ in the computation. The only point where we cannot follow the proof concerns the terms evaluated by

$$\|\partial_x^{s+3-q} v_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\partial_x^q (v_\varepsilon^n - v_\varepsilon)\|_{L^2},$$

for $0 \leq q \leq 3$. Indeed, we have balanced the coefficients involving ε to actually get uniform estimates with respect to this parameter (it was the purpose of Lemma 1.15) but here, we cannot do the same. In fact we cannot hope to have a uniform estimate in ε but, by a Gagliardo-Nirenberg inequality we find

$$\|\partial_x^{s+3-q} v_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\partial_x^q (v_\varepsilon^n - v_\varepsilon)\|_{L^2} \leq \frac{C}{\eta(\varepsilon)^{3-q+1/2}} \|v_\varepsilon^n - v_\varepsilon\|_{H^s}.$$

Finally, we obtain the following estimate

$$(62) \quad \|v_\varepsilon^n - v_\varepsilon\|_{L^\infty H^s} \leq C_\varepsilon \|v_0^n - v_0\|_{H^s},$$

with the constant C_ε going to $+\infty$ when ε goes to zero. Now, using all previous estimates

$$\begin{aligned} \|v^n - v\|_{L^\infty H^s} &\leq C_K (\|v_{\varepsilon,0}^n - v_0^n\|_{H^s} + F(\varepsilon)) + C_\varepsilon \|v_0^n - v_0\|_{H^s} \\ &\quad + C_K (\|v_{\varepsilon,0} - v_0\|_{H^s} + F(\varepsilon)), \end{aligned}$$

which finally yields

$$\|v^n - v\|_{L^\infty H^s} \leq 2C_K (\|v_{\varepsilon,0} - v_0\|_{H^s} + F(\varepsilon)) + (2C_K + C_\varepsilon) \|v_0^n - v_0\|_{H^s}.$$

Now we find that

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|v^n - v\|_{L^\infty H^s} \leq 2C_K (\|v_{\varepsilon,0} - v_0\|_{H^s} + F(\varepsilon)).$$

This finishes the proof as the right hand side of the last inequality goes to zero when ε goes to zero for any initial condition v_0 . \square

The proof of uniqueness is a straightforward corollary of the previous one. Instead of considering the difference between v^n and v , we consider the difference between two different solutions u and v but with the same initial data $u_0 = v_0$. Following the exact same steps of the previous proof, with $v_{\varepsilon,0} = u_{\varepsilon,0}$, we deduce

$$\|u - v\|_{L^\infty H^s} \leq 2C_K (\|v_{\varepsilon,0} - v_0\|_{H^s} + F(\varepsilon)).$$

Then, we get uniqueness when taking the limit ε goes to zero.

4.2. Concluding remarks

The present well-posedness result is set on the real line $x \in \mathbb{R}$. Nevertheless, as the proof use only the structure of the qKdV equation and does not uses any dispersion estimate, nothing prevents us from considering the same problem set on the torus $\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}$ for any period $\Xi > 0$. Then, we are able to give a similar well-posedness result on a unidimensional torus.

Theorem 1.18. *Assume that $k \geq 4$. If $p = -f' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is \mathcal{C}^{k+1} and $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ is \mathcal{C}^{k+2} , then for all $\Xi > 0$, $v_0 \in H^k(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$, there exists a time $T > 0$ and a unique $v \in \mathcal{C}(0, T; H^k(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H^{k-3}(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))$ solution to (35) with initial data v_0 . Moreover, $v_0 \mapsto v$ maps continuously $H^k(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ into $\mathcal{C}(0, T; H^k(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H^{k-3}(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))$.*

Though we have not carried out such task here, it is likely that one may adapt the strategy expounded here to deal with non integer indices of regularity and relax the constraint $k \geq 4$ to $k > 3 + 1/2$.

At first, we were aiming at a well-posedness result compatible with the study of the non-linear stability of a known solution. More precisely, we were initially looking for a solution of the equation as a perturbation around a bounded and infinitely differentiable given solution of (qKdV). Nevertheless, it appears that the gauge technique does not work well in this case. The functions defining the gauge are harder to construct when coefficients depend not only the unknown solution but also on the known profile, especially when both parts have different localization properties. A perspective we did not investigate here would be the study of a perturbations around a periodic state. The periodicity property, used similarly as in [109], should enable us to overcome the previous difficulty and should give us the suitable gauge estimates.

Chapitre 2

Approche numérique de la stabilité des ondes périodiques dans les systèmes hamiltoniens

Ce chapitre reprend les résultats de *Co-periodic stability of periodic waves in some Hamiltonian PDEs* [20], écrit en collaboration avec S. Benzoni-Gavage et L. M. Rodrigues et paru à *Nonlinearity*, 29(11) :3241, 2016. Il est reproduit en annexe A. Il donne également des résultats de *Modulated equations of Hamiltonian PDEs and dispersive shocks* [18] issu des mêmes collaborations et en cours de finalisation.

1. Équation de profil et famille d'ondes paramétrées

On s'intéresse à un type particulier de solutions de (2) : des ondes périodiques progressives. Ces solutions s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{U}(t, x) = \underline{\mathbf{U}}(x - ct),$$

où c est la vitesse de déplacement de l'onde. Une solution de (2) satisfait également la relation algébrique (7), ce qui implique que le profil $\underline{\mathbf{U}}$ d'une onde progressive satisfasse

$$\partial_x(\delta(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}]) = 0.$$

Autrement dit, il existe $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$(63) \quad \delta(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}] = -\boldsymbol{\lambda}.$$

Cette dernière équation est une équation d'Euler-Lagrange associée au lagrangien \mathcal{L} défini par

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x; \boldsymbol{\lambda}, c) = \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) + c\mathcal{Q}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{U},$$

et par conséquent, $\mathbf{L}\mathcal{L}$ est une intégrale première du système (63). Si $\underline{\mathbf{U}}$ est solution de (63), il existe alors $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$(64) \quad \mathbf{L}\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x; \boldsymbol{\lambda}, c) = \mu.$$

Les paramètres $\boldsymbol{\lambda}$ et μ sont des constantes d'intégration. Les composantes de $\boldsymbol{\lambda}$ jouent le rôle de multiplicateurs de Lagrange et μ représente un niveau d'énergie associé à l'énergie $\mathbf{L}\mathcal{L}$, conservée par (63). En résumé, les ondes progressives d'un système hamiltonien à N équations forment généralement une famille à $N + 2$ paramètres $(\mu, \boldsymbol{\lambda}; c) \in \mathbb{R}^{N+2}$.

De plus, avec les définitions du hamiltonien \mathcal{H} et du moment \mathcal{Q} , la seconde équation de (63) s'écrit

$$\partial_u \mathcal{S}(\underline{v}, \underline{u}) + c\partial_u \mathcal{Q}(\underline{v}, \underline{u}) = \lambda_u.$$

L'hypothèse de stricte convexité de \mathcal{S} selon la variable u nous permet de réécrire cette dernière équation sous la forme

$$T(\underline{v})\underline{u} + \partial_u \mathcal{S}(\underline{v}, 0) + c\underline{b}\underline{v} = -\lambda_u, \quad T(\underline{v}) = \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial u^2} > 0, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \pm 1.$$

Ce qui permet d'affirmer que

$$\underline{u} = \tilde{u}(v; c, \lambda_u) = -T(\underline{v})^{-1} (\partial_u \mathcal{S}(\underline{v}, 0) + c\underline{b}\underline{v} + \lambda_u).$$

L'équation (64) peut alors se simplifier en

$$(65) \quad \frac{1}{2}\kappa(\underline{v})(\underline{v}_x)^2 + \mathcal{W}(\underline{v}; c, \boldsymbol{\lambda}) = \mu,$$

où \mathcal{W} joue le rôle d'un *potentiel* défini par

$$(66) \quad \mathcal{W}(v; c, \boldsymbol{\lambda}) = -f(v) - \mathcal{S}(v, \tilde{u}(v)) - c\mathcal{Q}(v, \tilde{u}(v)) - \boldsymbol{\lambda} \cdot (v, \tilde{u}(v))^t.$$

Commençons par analyser un exemple de potentiel \mathcal{W} . La figure 2.1 représente le potentiel associé à l'équation de KdV en fonction de la variable v à (c, λ) fixés, ainsi que différents

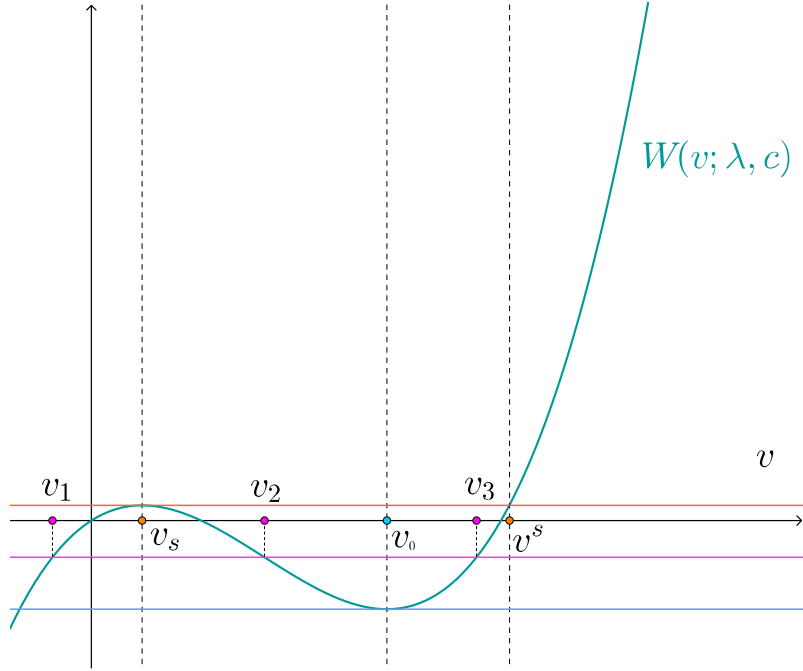


FIGURE 2.1. Exemple de potentiel $\mathcal{W}(v)$ de type KdV. Les niveaux d'énergie μ sont représentés par des lignes horizontales de couleurs.

niveaux d'énergie μ . Dans ce cas correspondant à $N = 1$, $p(v) = 3v^2$ et le potentiel \mathcal{W} est un polynôme de degré 3 selon la variable v

$$\mathcal{W}(v; c, \lambda) = v^3 - \frac{c}{2}v^2 - \lambda v.$$

Sur la figure 2.2 sont représentées les orbites associées aux différents niveaux d'énergie μ de la figure 2.1 dans le plan de phase (v, v_x) . Ces orbites sont obtenues à partir de l'équation (13) pour différents paramètres μ admissibles, c'est à dire les $\mu \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe au moins un v qui vérifie

$$\mu - \mathcal{W}(v; c, \lambda) \geq 0,$$

toujours à (c, λ) fixés. Plus précisément, toujours dans le cas $N = 1$, la dérivée première du potentiel $\mathcal{W}(v; \lambda, c)$ est donnée par

$$v \mapsto \partial_v \mathcal{W}(v; \lambda, c) = p(v) - cv - \lambda,$$

et donc sa dérivée seconde par

$$v \mapsto \partial_v^2 \mathcal{W}(v; \lambda, c) = p'(v) - c.$$

À la vue des similitudes avec le cas $N = 2$, on emprunte la terminologie employée en physique des fluides et on nomme *droite de Rayleigh* la droite définie par

$$v \mapsto p(v) - \partial_v \mathcal{W}(v; \lambda, c) = cv + \lambda,$$

de telle manière qu'une intersection de cette droite avec la courbe $v \mapsto p(v)$ est un point centre du portrait de phase si et seulement si $p'(v) > c$ est un point selle si l'inégalité inverse est vérifiée. Le portrait de phase 2.2 est donc construit à partir de cette droite et de la courbe $v \mapsto p(v)$ donc l'exemple de (KdV) est représenté sur la figure 2.3. On y distingue la présence d'un point centre et d'un point selle qui sont représentés sur la figure 2.2. L'analyse de ce type de portrait de phase met en évidence l'existence d'une famille d'ondes progressives allant du soliton, ou onde solitaire, à l'onde stationnaire. L'orbite homocline orange avec une énergie associée au maximum local de \mathcal{W} correspond à l'onde solitaire d'état à l'infini v_s , tandis que l'orbite bleue associée au minimum local de \mathcal{W}

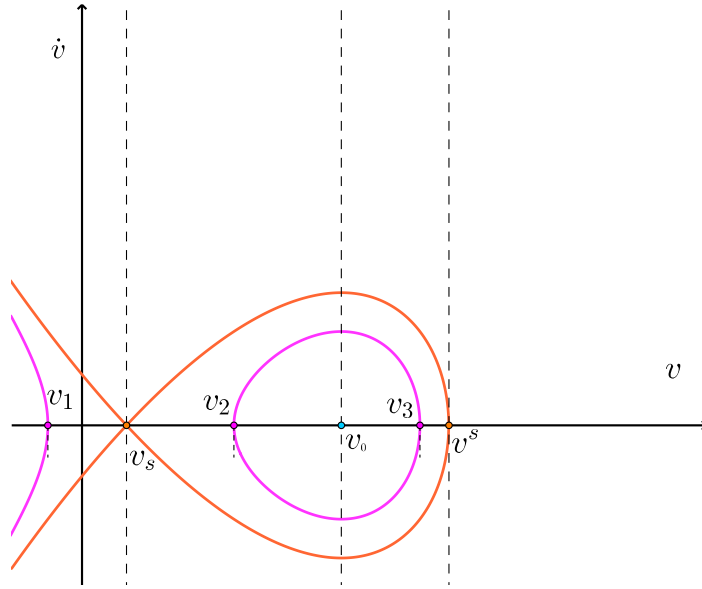


FIGURE 2.2. Portrait de phase (v, v_x) dans lequel apparaissent les orbites associées aux niveaux d'énergie μ de la figure 2.1.

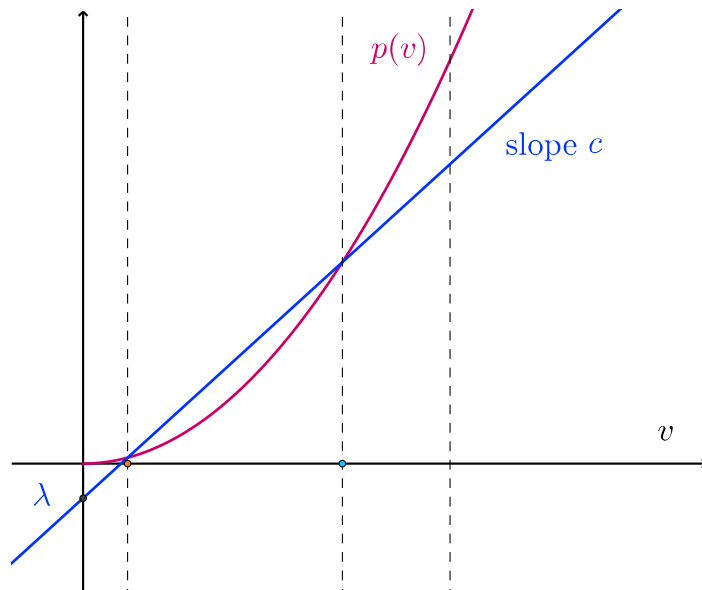


FIGURE 2.3. Exemple de courbe $v \mapsto p(v)$ et droite de Rayleigh pour l'équation de KdV.

correspond à l'onde stationnaire d'état v_0 . Entre ces deux états d'énergie, il existe toute une gamme de solutions périodiques dont un exemple est représenté en rose. Pour une équation telle que KdV, ces informations sont bien connues. En revanche, les types de potentiels et de portraits de phase dépendent de la non-linéarité que l'on considère. Dans

le cas $N = 1$, pour l'équation de KdV généralisée, c'est une loi de puissance $p(v) = v^\gamma$ avec $\gamma > 0$, mais on peut aussi considérer une non-linéarité de type shallow-water $p(v) = v^{-\gamma}$.

Dans le cas $N = 2$, l'analyse du portrait de phase se fait de la même manière. Puisque κ est strictement positive, le portrait de phase associé à

$$(v, v_x) \mapsto \frac{1}{2}\kappa(v)v_x^2 + \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c)$$

admet un point centre et un point selle. On cherche donc v_s et v_0 , deux points critiques du potentiel $\mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c)$. Le point selle v_s , vérifiant $\partial_v^2 \mathcal{W}(v_s; \boldsymbol{\lambda}, c) < 0$, correspond à l'état à l'infini de l'onde solitaire, dont l'existence est assurée par la présence d'un second état v^s vérifiant lui aussi

$$\mu_s = \mathcal{W}(v_s; \boldsymbol{\lambda}, c) = \mathcal{W}(v^s; \boldsymbol{\lambda}, c).$$

Autour du point centre v_0 , qui vérifie $\partial_v^2 \mathcal{W}(v_0; \boldsymbol{\lambda}, c) > 0$, il existe des ondes périodiques de faible amplitude. On lui associe la valeur $\mu_0 = \mathcal{W}(v_0; \boldsymbol{\lambda}, c)$. Dans la suite de cette analyse, on considérera $v_s < v_0 < v^s$, comme dans l'exemple fig. 2.1. L'autre possibilité correspond à une inversion de l'ordre de v_s et v^s , auquel cas l'onde solitaire est généralement appelée *dark soliton*.

Puisque le potentiel $\mathcal{W}(\cdot; \boldsymbol{\lambda}, c)$ est monotone sur chacun des intervalles (v_s, v_0) et (v_0, v^s) , on peut définir un intervalle $I(\boldsymbol{\lambda}, c) = [\mu_0, \mu_s] \subset \mathbb{R}$ tel que pour tous les paramètres $\mu \in I(\boldsymbol{\lambda}, c)$, l'équation

$$\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c) = 0,$$

admet uniquement deux racines comprises entre v_s et v^s , représentées par v_2 et v_3 sur l'exemple de la figure 2.1. Ainsi, à $(\boldsymbol{\lambda}, c)$ fixé, on trouve un ensemble de valeurs $\mu \in I(\boldsymbol{\lambda}, c)$ pour lesquelles les ondes associées sont périodiques, avec des valeurs $v \in [v_2, v_3]$. À mesure que μ s'approche de μ_s , la période des ondes tend vers l'infini tandis que lorsque μ tend vers μ_0 , l'amplitude des ondes décroît vers zéro.

2. Intégrale d'action et critères de stabilité

On souhaite maintenant étudier les propriétés de stabilité des ondes périodiques dont nous disposons. Considérons de nouveau une onde progressive périodique sous la forme

$$\mathbf{U}(t, x) = \underline{\mathbf{U}}(x - ct),$$

où $\underline{\mathbf{U}}$ est une solution périodique des équations de profil (63) et (64). On note de plus Ξ sa période spatiale qui est déterminée par le choix des paramètres $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$. Dans la suite, on considérera plus particulièrement deux notions de stabilité distinctes, stabilité modulationnelle et stabilité orbitale, qui sont définies ci-dessous. Elles correspondent à la stabilité du profil $\underline{\mathbf{U}}$ par rapport à des perturbations de natures différentes.

Notre objectif ici est de caractériser les propriétés de stabilité d'un profil périodique à l'aide de critères simples et évaluables numériquement. On commencera donc par présenter l'objet qui sera au centre de ces différents critères : l'intégrale d'action.

2.1. Intégrale d'action

Pour un profil périodique $\underline{\mathbf{U}}$ donné satisfaisant (63) (64), de période Ξ , on définit l'intégrale d'action par

$$(67) \quad \Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \int_0^\Xi (\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}] + c\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \mu) dx.$$

Grâce à (64) et sous réserve de régularité de \mathcal{H} , on peut réécrire

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \oint \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_x}(\underline{\mathbf{U}}, v_x) dv,$$

ce qui correspond à l'action de l'équation d'Euler-Lagrange (63).

Afin de mieux comprendre la raison pour laquelle cette quantité apparaît dans notre problème, rappelons ce qui a été obtenu dans [21, Prop. 1 & 2, Cor. 1].

Proposition 2.1. *On suppose $\mathcal{H} : (\mathbf{U}, v_x) \mapsto \mathcal{H}(\mathbf{U}, v_x)$ régulière sur un ouvert \mathbf{U} de \mathbb{R}^{N+1} . On suppose également qu'il existe un ouvert Ω de \mathbb{R}^{N+2} et une famille de profils périodiques paramétrés par $(c, \boldsymbol{\lambda}, \mu) \in \Omega$, c'est-à-dire que l'application*

$$(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \mapsto (\underline{\mathbf{U}}, \Xi) \in \mathcal{C}_b^2 \times \mathbb{R}$$

est régulière pour tous $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$ et telle que (63) et (64) soient vérifiées avec de plus $\underline{\mathbf{U}}(0) = \underline{\mathbf{U}}(\Xi)$, $v_x(0) = v_x(\Xi) = 0$.

Alors la fonction Θ définie par (67) est régulière sur Ω et on a les relations suivantes

$$(68) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \mu} = \Xi, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial c} = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx, \quad \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Theta = \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx.$$

En conséquence, l'application $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega \mapsto (k, \mathbf{M}, P)$ est un difféomorphisme de Ω sur son image si et seulement si elle est injective et

$$\det(\text{Hess}\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)) \neq 0, \quad \forall (\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega.$$

Dans ce cas, le système d'équations modulées de Whitham (24) est équivalent au système suivant

$$(69) \quad \begin{cases} \partial_T(\partial_\mu \Theta) + c \partial_X(\partial_\mu \Theta) - (\partial_\mu \Theta) \partial_X c = 0, \\ \partial_T(\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Theta) + c \partial_X(\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Theta) + (\partial_\mu \Theta) \mathbf{B} \partial_X \boldsymbol{\lambda} = 0, \\ \partial_T(\partial_c \Theta) + c \partial_X(\partial_c \Theta) - (\partial_\mu \Theta) \partial_X \mu = 0. \end{cases}$$

Non seulement l'intégrale d'action Θ apparaît naturellement dans l'étude des équations modulées de Whitham, mais elle joue aussi un rôle encore plus naturel d'un point de vue variationnel. En effet, l'équation d'Euler-Lagrange (63) signifie qu'un profil périodique $\underline{\mathbf{U}}$ de période Ξ est un point critique de la fonctionnelle

$$\mathcal{F}^{(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)} : \mathbf{U} \mapsto \int_0^\Xi (\mathcal{H}[\mathbf{U}] + c \mathcal{Q}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{U} + \mu) dx,$$

à Ξ fixé. Ainsi Θ définie par (67) est un candidat pour la valeur minimale de $\mathcal{F}^{(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)}$. On verra ci-dessous, à la section 2.3, comment ce type de fonctionnelle peut être utilisé comme fonctionnelle de *Lyapunov* pour une étude de stabilité orbitale.

L'intégrale d'action est donc une quantité intimement liée aux propriétés de stabilité que l'on souhaite traiter ici. En quelque sorte, son omniprésence n'est pas une surprise car cette fonction joue le même rôle que le *moment d'instabilité* introduit par Boussinesq en 1872 dans [30] pour l'étude des ondes solitaires, mais cette fois pour les ondes périodiques.

2.2. Critère de stabilité modulationnelle

Considérons le problème de stabilité modulationnelle et pour cela, commençons par réécrire le système (69). En introduisant

$$\mathbf{S} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 \cdots 0 & -1 \\ \hline 0 & & 0 \\ \vdots & \mathbf{B} & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \hline -1 & 0 \cdots 0 & 0 \end{array} \right),$$

on obtient une formulation matricielle, en supposant $\text{Hess}\Theta$ inversible,

$$(70) \quad \partial_T \mathbf{W} + \mathbf{D} \partial_X \mathbf{W} = 0,$$

où $\mathbf{W}^\top = (\mu, \boldsymbol{\lambda}^\top, c)$ et

$$\mathbf{D} = c \text{Id} + \Xi (\text{Hess}\Theta)^{-1} \mathbf{S}.$$

D'après la définition 0.4, sous les hypothèses de la proposition 2.1, un profil $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ est modulationnellement stable si et seulement si $\text{Hess}\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ est inversible et le système (70) est hyperbolique. Ceci permet d'établir le critère de stabilité modulationnelle suivant

Critère 1. Soit $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ un profil périodique. $\underline{\mathbf{U}}$ est modulationnellement stable si et seulement si $\text{Hess}\Theta$ est inversible au point $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ et $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ est diagonalisable sur \mathbb{R} .

En pratique, dans les cas de (KdV) et (EKL) pour lesquels $N = 1$ ou 2 , la stabilité modulationnelle d'un profil donné sera donc étudiée à travers le spectre d'une matrice de taille $N + 2$.

2.3. Critère de stabilité orbitale

Considérons maintenant le problème de stabilité orbitale vis à vis de perturbations de même période que l'onde considérée. Comme dans le cas des solutions stationnaires d'ÉDO, l'idée est de tirer profit de la théorie de Lyapunov. Les difficultés inhérentes aux ÉDP sont traitées par l'approche de Gillakis-Shatah-Strauss. Celle-ci permet d'établir un critère pour que la fonctionnelle

$$\mathcal{F}^{(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)} : \mathbf{U} \mapsto \int_0^\Xi (\mathcal{H}[\mathbf{U}] + c\mathcal{Q}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{U} + \mu) dx,$$

admette un minimum local au point $\underline{\mathbf{U}}$, non pas sur son espace de définition $\mathbb{H}^1 = H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times (L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^{N-1}$ mais sur une variété *contrainte* $\mathbb{H}^1 \cap \mathcal{C}$, avec

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{U} \in (L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N ; \int_0^\Xi \mathbf{U} dx = \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx ; \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}) dx = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx \right\}.$$

Les contraintes sont liées au fait que les intégrales $\int_0^\Xi \mathbf{U} dx$ et $\int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}) dx$ sont conservées le long des solutions Ξ -périodiques de (2). Cette approche est bien connue dans le cas du soliton [67] pour lequel elle a permis d'établir un critère de stabilité impliquant la dérivée seconde du moment de Boussinesq par rapport à la vitesse du soliton $\mathbf{M}_{cc} > 0$.

Lorsqu'on cherche une condition pour que l'opérateur $\mathcal{A} = \text{Hess}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}]$ soit positif sur

$$T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{U} \in (L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N ; \int_0^\Xi \mathbf{U} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx = 0 ; \int_0^\Xi \mathbf{U} dx = 0 \right\},$$

on établit le théorème suivante impliquant la signature négative $n(\text{Hess}\Theta)$ de la matrice $\text{Hess}\Theta$, c'est-à-dire le nombre de valeurs propres négatives en comptant leur multiplicité.

On introduit également la matrice jacobienne \mathbf{C} des contraintes $\int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx$ et $\int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx$, à période Ξ fixée, en fonction des paramètres $(\boldsymbol{\lambda}, c)$.

Théorème 2.1. *On suppose Θ telle que sa dérivée seconde $\Theta_{\mu\mu}$ est non nulle et que la matrice*

$$\mathbf{C} = \frac{\check{\nabla}\Theta_\mu \otimes \check{\nabla}\Theta_\mu}{\Theta_{\mu\mu}} - \check{\nabla}^2\Theta,$$

est inversible pour $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$ avec $\check{\nabla} = \begin{pmatrix} \nabla_\lambda \\ \partial_c \end{pmatrix}$. Alors on a la relation suivante sur les signatures négatives

$$(71) \quad n(\mathcal{A}) = n(\mathcal{A}|_{T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{E}}) + n(\mathbf{C}).$$

Ce théorème établi dans [21, Th. 3] utilise un résultat de nature algébrique [105, 84]. Ainsi, la condition de stabilité sur l'opérateur $\mathcal{A}|_{T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{E}}$ se traduit par

$$n(\mathcal{A}) - n(\mathbf{C}) = 0.$$

En travaillant d'une part sur les signatures négatives des matrices \mathbf{C} et $\text{Hess}\Theta$, et d'autre part sur celle de l'opérateur différentiel \mathcal{A} , dont l'étude de spectre se ramène à celle d'un opérateur de Sturm-Liouville, on obtient la relation

$$n(\mathcal{A}) - n(\mathbf{C}) = n(\text{Hess}\Theta) - N.$$

Par conséquent, le critère de stabilité revient simplement à $n(\text{Hess}\Theta) = N$. À défaut de le faire analytiquement, on peut tester numériquement les conditions $\Theta_{\mu\mu} \neq 0$, $\det \text{Hess}\Theta \neq 0$ et $n(\text{Hess}\Theta) = N$. On peut ainsi résumer ce que donnent les critères pour l'équation de KdV et le système d'Euler-Korteweg.

Critère 2. Stabilité orbitale co-périodique pour (KdV).

Si pour un certain $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ les conditions

$$\Theta_{\mu\mu} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) \neq 0, \quad n(\text{Hess}\Theta) = 1,$$

sont satisfaites, alors l'onde périodique associée à $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ solution de l'équation de KdV est conditionnellement orbitalement stable dans $H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$.

Pour le système d'Euler-Korteweg, comme deux représentations sont possibles, on formule deux critères. En effet, même si les deux représentations fournissent des équations de profils équivalentes, avec des structures analogues, les paramètres abstraits $(\mu, \lambda_1, \lambda_2, c)$ n'ont pas la même signification selon le point de vue. On utilise plus volontiers les paramètres $(\mu, \lambda, j, \sigma)$ pour (EKE) et (EKL) et pour lesquels on a la correspondance dans la table A.2.

abstrait	μ	λ_1	λ_2	c
EKE	μ	$-\lambda$	j	σ
EKL	λ	$-\mu$	σ	$-j$

TABLE 2.1. Notations des paramètres

Physiquement, σ est la vitesse de l'onde (unité de longueur/unité de temps) et j est le transfert de matière à travers l'onde (homogène à une densité fois une vitesse). On constate sur la table A.2 que les rôles de c et j , et de μ et λ , sont, au signe près, échangés entre (EKE) et (EKL). De plus, ces systèmes ont la même action Θ , dont la hessienne a le même déterminant et la même signature négative en variables abstraites $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ ou en "variables physiques" (μ, λ, j, c) .

Critère 3. Stabilité orbitale co-périodique pour (EKE).

Si pour un certain $(\mu, \lambda, j, \sigma)$ les conditions

$$\Theta_{\mu\mu} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) \neq 0, \quad n(\text{Hess}\Theta) = 2,$$

sont satisfaites, alors l'onde périodique associée, solution de l'équation de (EKE) est conditionnellement orbitalement stable dans $H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$.

Critère 4. Stabilité orbitale co-périodique pour (EKL).

Si pour un certain $(\lambda, \mu, j, \sigma)$ les conditions

$$\Theta_{\lambda\lambda} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) \neq 0, \quad n(\text{Hess}\Theta) = 2,$$

sont satisfaites, alors l'onde périodique associée, solution de l'équation de (EKL) est conditionnellement orbitalement stable dans $H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$.

D'un point de vue pratique, tous les calculs numériques seront menés en coordonnées lagrangiennes. L'intégrale d'action étant la même dans les deux représentations, il suffit d'effectuer nos calculs sur la version Lagrangienne et de vérifier à la fois la condition $\Theta_{\lambda\lambda} \neq 0$ et la condition $\Theta_{\mu\mu} \neq 0$, ou encore en coordonnées abstraites $\Theta_{\mu\mu} \neq 0$ et $\Theta_{\lambda_1\lambda_1} \neq 0$. On se concentrera donc sur le critère 4 ainsi que sur la condition supplémentaire $\Theta_{\lambda_1\lambda_1} \neq 0$ (en coordonnées abstraites) afin de vérifier numériquement qu'une onde à les mêmes propriétés de stabilité dans les deux systèmes de coordonnées.

On établit également la pseudo-alternative suivante

Théorème 2.2. Soit $N \in \{1, 2\}$ et \mathcal{H} de la forme (4)-(5). On fait les hypothèses suivantes

- (1) Il existe un ouvert Ω de \mathbb{R}^{N+2} et une famille de profils périodiques $\underline{\mathbf{U}}$ paramétrés par $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$ solutions des équations de profil (12)-(13). De plus, si on note Ξ la période du profil $\underline{\mathbf{U}}$

$$(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega \mapsto (\underline{\mathbf{U}}, \Xi) \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

est continument différentiable.

- (2) La période Ξ est une fonction strictement monotone du paramètre μ ($\Xi_\mu \neq 0$) et l'intégrale d'action Θ définie par (17) est telle que la matrice $\text{Hess}\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ est inversible pour tout $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$.
- (3) Pour toute période Ξ dans l'ensemble des périodes atteintes sur Ω , il existe un sous-espace dense \mathbb{H}_Ξ de $(L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N$ et un ouvert de \mathbb{H}_Ξ sur lequel la fonctionnelle

$$\mathbf{U} \mapsto \int_0^\Xi \mathcal{H}[\mathbf{U}] dx$$

est de classe \mathcal{C}^2 , et si on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre \mathbb{H}'_Ξ et \mathbb{H}_Ξ , il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}_\Xi}^2 = \langle \text{Hess}\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}]\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle + \alpha \|\mathbf{U}\|_{L^2}^2$$

définisse une norme équivalente sur \mathbb{H}_Ξ , uniformément selon les paramètres caractérisants le profil $(\underline{\mathbf{U}}, \Xi)$.

- (4) Pour toute période Ξ dans l'ensemble des périodes atteintes sur Ω , il existe un sous-espace dense \mathbb{W}_Ξ de \mathbb{H}_Ξ pour lequel le problème de Cauchy associé à (2) est localement bien posé.

Alors on a la pseudo alternative suivante : pour tout $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$

- si $n(\text{Hess}\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)) - N = 0$, alors l'onde associée est orbitalement stable,
- si $n(\text{Hess}\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)) - N$ est impair, alors l'onde associée est spectralement instable.

Ce théorème est démontré dans l'article reproduit reproduit à l'annexe A (voir rq. A.9).

Remarque 2.2. En pratique, on s'attend au fait que l'instabilité spectrale entraîne l'instabilité non-linéaire des ondes. Même si cette pseudo-alternative ne fournit pas de confirmation, elle n'entre pas en contradiction avec ces attentes. Pour simplifier, on parlera d'onde instable lorsque $n(\text{Hess}\Theta) - N$ est impair.

Remarque 2.3. Il existe un lien entre l'action Θ associée au système d'Euler-Korteweg ($N = 2$) et l'action θ associée à l'équation de Korteweg-de Vries généralisée ($N = 1$). En effet, il est démontré dans l'annexe A, section 5.2.3 que l'on peut exprimer $\text{Hess}\Theta(\mu, \lambda, j, \sigma)$ en fonction de $\nabla\theta$ et $\text{Hess}\theta$ évalués au point $(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2, j\sigma - \mu, -j^2)$. Ce lien permet d'établir le théorème suivant (Th. A.25) qui compare les résultats de stabilité du système (EKL) avec ceux de l'équation (gKdV).

Théorème 2.3. *Sous réserve d'existence d'une onde périodique de (EKL) paramétrée par $(\mu, \lambda, j, \sigma)$ et d'une onde périodique de (gKdV) paramétrée par $(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2, j\sigma - \mu, -j^2)$, si*

$$j \neq 0, \quad \Theta_{\mu\mu} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\theta) \det(\text{Hess}\Theta) < 0,$$

alors

$$n(\text{Hess}\theta) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n(\text{Hess}\Theta) = 2.$$

Dans ce cas, l'onde périodique de (EKL) paramétrée par $(\mu, \lambda, j, \sigma)$ et l'onde périodique de (gKdV) paramétrée par $(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2, j\sigma - \mu, -j^2)$ sont toutes deux conditionnellement orbitalement stable.

3. Recherche systématique d'ondes périodiques

Dans cette section, on s'intéresse plus particulièrement à la recherche systématique, de manière numérique, d'ondes progressives périodiques. Le problème peut être résumé de la manière suivante : pour un système du type (2) avec $N = 1, 2$, étant données les différentes fonctions $\mathcal{I}, \mathcal{Q}, p$ et $p = -f'$, trouver l'ensemble Λ des paramètres $(c, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ pour lesquels le système admet des solutions progressives périodiques et auquel cas, en déduire l'intervalle $I(\boldsymbol{\lambda}, c) \subset \mathbb{R}$ associé pour les valeurs possibles du paramètre μ . Pour certaines non-linéarités simples, on peut calculer les domaines Λ et $I(\boldsymbol{\lambda}, c)$ explicitement. Ce n'est pas le cas en général et c'est pourquoi une exploration numérique systématique est intéressante.

3.1. Méthodologie

La donnée du problème, pour chaque couple $(\boldsymbol{\lambda}, c) \in \mathbb{R}^{N+1}$ que l'on doit tester, est la fonction $v \mapsto \mathcal{W}(v; c, \boldsymbol{\lambda})$ sur un intervalle fixé V , ainsi que ses dérivées selon la variable v . Dans un premier temps, on cherche les minima locaux de ce potentiel. En cas d'échec, on modifie l'intervalle V avant de relancer la recherche. On sait alors qu'il existe un intervalle $I(\boldsymbol{\lambda}, c)$ dont le minimum est la valeur du potentiel à son minimum local, tel que l'on ait des profils périodiques pour $\mu \in I(\boldsymbol{\lambda}, c)$. Déterminer le plus grand intervalle $I(\boldsymbol{\lambda}, c)$ demande de rechercher les maxima locaux du potentiel les plus proches du minimum local. Toutes ces recherches peuvent se faire par la méthode de Newton. Trois méthodes de Newton successives permettent de trouver le minimum local du potentiel, son maximum local s'il existe, ainsi que la valeur de v pour laquelle le potentiel atteint le même niveau d'énergie que son maximum local. Ces trois valeurs, représentées par les lignes verticales pointillées sur les figures 2.1 et 2.2, permettent de connaître tous les paramètres du *puits de potentiel* que l'on souhaite étudier. C'est-à-dire, l'intervalle $I(\boldsymbol{\lambda}, c)$, l'intervalle V et la solution stationnaire du problème.

La tolérance utilisée pour la méthode de Newton est $\varepsilon = 10^{-10}$ et plusieurs tests mettant en jeu le signe de $\partial_v^2 \mathcal{W}$ sont effectués en cours de boucle afin de vérifier la convergence vers un minimum ou un maximum local. En pratique, sachant que le succès de la méthode de Newton dépend fortement de son initialisation, le critère sur le signe de la dérivée seconde du potentiel permet d'analyser la convergence de l'algorithme vers une solution admissible et de relancer la méthode à partir d'un autre point choisi dans le cas contraire. La répétition de cette opération un nombre fini de fois permet dans la grande majorité des cas d'aboutir au résultat en un temps de calcul tout à fait acceptable, c'est-à-dire de l'ordre de la minute pour 2500 couples $(\boldsymbol{\lambda}, c)$ testés. Bien qu'elle permette d'aborder les systèmes hamiltoniens en toute généralité, cette méthode reste imparfaite et peut échouer pour certains cas pathologiques, comme on l'a observé pour des potentiels trop *plats*, où l'intervalle $I(\boldsymbol{\lambda}, c)$ est trop petit, ou trop *oscillants*, où la recherche d'extrema locaux adjacents pose problème.

3.2. Quelques résultats numériques

On présente ici quelques résultats de cette méthode de recherche. Sur la figure 2.4 est représenté en rouge l'ensemble des couples $(c, \boldsymbol{\lambda}) \in \Lambda$ associés à un potentiel admettant un minimum local, à gauche pour l'équation de KdV et à droite pour l'équation de KdV généralisée d'ordre 4. On observe effectivement pour ces systèmes l'existence d'ondes périodiques caractérisées par les couples $(\boldsymbol{\lambda}, c)$, dits *admissibles*. Pour (KdV), on connaît explicitement la frontière du domaine Λ . Dans ce cas, le potentiel est un polynôme de degré 3

$$\mathcal{W}(v; \lambda, c) = v^3 - \frac{c^2}{2}v^2 - \lambda v,$$

et le domaine Λ est caractérisé par l'existence de deux racines distinctes de la dérivée

$$\partial_v \mathcal{W}(v; \lambda, c) = 3v^2 - c^2v - \lambda.$$

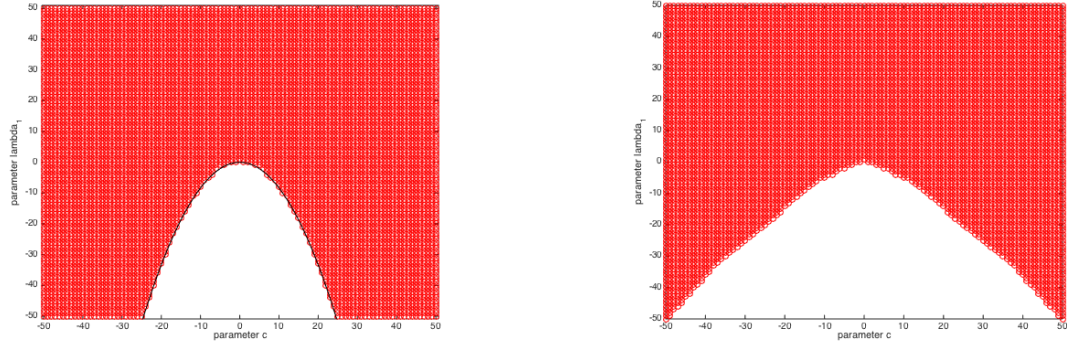


FIGURE 2.4. Dans le cas $N = 1$ est représenté en rouge le lieu des points $(\boldsymbol{\lambda}, c)$ pour lesquels le potentiel $\mathscr{W}(\cdot; c, \boldsymbol{\lambda})$ admet des ondes progressives périodiques, pour l'équation de KdV à gauche ($p = 3v^2$) et KdV généralisée à droite ($p = 5v^4$). Dans les deux cas, la recherche est effectuée pour $|c| \leq 50$ et $|\boldsymbol{\lambda}| \leq 50$.

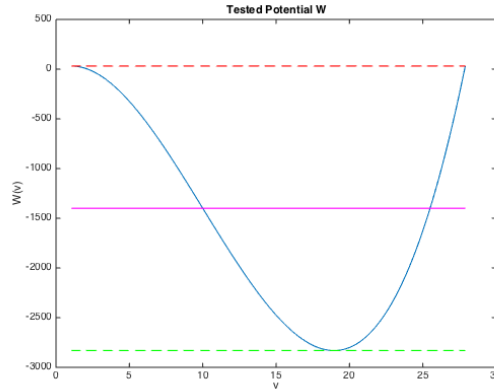


FIGURE 2.5. Dans le cas $N = 1$ et pour l'équation de KdV, $p = 3v^2$. Le potentiel $\mathscr{W}(v; c\boldsymbol{\lambda})$ en fonction de v pour $c = 60$ et $\boldsymbol{\lambda} = -60$ (en bleu) après recherche des différents paramètres par méthodes de Newton.

L'équation qui décrit la frontière de Λ s'écrit donc

$$c^2 + 12\lambda = 0.$$

Ainsi, si $\lambda > \frac{-c^2}{12}$, alors $(\lambda, c) \in \Lambda$. Ceci est cohérent avec les résultats présentés fig. 2.4, sur laquelle cette frontière est représentée en noir (à gauche). Dans un second temps, pour chaque couple $(\boldsymbol{\lambda}, c)$ admissible, il reste à déterminer l'intervalle $I(\boldsymbol{\lambda}, c)$ qui permettra de caractériser entièrement la famille d'ondes périodiques issue du point stationnaire où le potentiel a un minimum local. Le résultat de la recherche de l'intervalle $I(\boldsymbol{\lambda}, c)$, ainsi que celle de l'intervalle V est représenté sur la figure 2.5 dans le cas particulier de l'équation de KdV et pour $c = 60$ et $\boldsymbol{\lambda} = -60$. Sur cette figure, on a représenté en rouge le niveau d'énergie μ maximal correspondant à la limite soliton, en vert le niveau minimal associé à la limite harmonique et en mauve le niveau moyen pour lequel l'onde associée est périodique. En répétant l'opération pour l'ensemble des paramètres (c, λ) admissibles, on obtient une famille de solutions périodiques d'un système en fonction des paramètres $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ qui pourra être exploitée par la suite.

3.3. Discussion sur la précision des résultats

De prime abord, la recherche d'extrema par la méthode de Newton peut sembler être une erreur. En effet, il existe de nombreuses méthodes numériques bien mieux adaptées à ce type de problème. Néanmoins, ici on se contente d'une méthode de Newton pour la bonne et simple raison que l'on travaille sur un problème scalaire et que cet algorithme ne requiert qu'un faible nombre d'itérations et donc un temps de calcul très faible en comparaison d'autres méthodes. Étant donné que l'on envisage une étude généralisée des systèmes hamiltoniens, il semble important de privilégier le coût de calcul des opérations simples afin de pouvoir les répéter un grand nombre de fois.

Il convient également de mentionner les imprécisions numériques provenant de la définition du système (2). Plus précisément, pour certains systèmes et certains jeux de paramètres, la recherche d'un *puits de potentiel* peut s'avérer extrêmement imprécise. C'est le cas des deux équations présentées ci-dessus, KdV et (gKdV) pour lesquelles l'ensemble des paramètres (c, λ) admissibles admet une frontière. Pour les couples de paramètres admissibles proches de cette frontière, les différents points recherchés (minimum local, maximum local, etc...) sont numériquement presque confondus, ou de manière équivalente, la *profondeur* du puits de potentiel en question est numériquement trop faible en comparaison des écarts qui seront nécessaire pour effectuer la suite de notre calcul. Dans ces cas particuliers, on trouve donc des paramètres (c, λ) admissibles mais les imprécisions numériques peuvent compromettre totalement leur exploitation ultérieure. Néanmoins, ce genre d'imprécision peut être surmonté en étudiant les cas *pathologiques* en particulier, c'est à dire en raffinant les différentes recherches afin d'augmenter la précision.

4. Approche numérique pour l'évaluation des critères de stabilité

Rappelons que l'outil commun à tous les critères de stabilité qui ont été introduits est l'intégrale d'action Θ , ou plus précisément ses dérivées secondes contenues dans sa matrice Hessienne $\text{Hess}\Theta$. Cette section concerne une méthode numérique permettant de tester les critères de la section 2.

4.1. Méthodologie

Rappelons tout d'abord la forme de l'intégrale d'action (67)

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \int_0^\Xi (\mathcal{H}[\mathbf{U}] + c\mathcal{Q}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{U} + \mu) dx,$$

qui peut se réécrire comme une intégrale de contour dans le plan de phase. Cette dernière se réduit à

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \oint \sqrt{2\kappa(v)(\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))} dv.$$

Pour calculer cette intégrale, nous avons besoin des paramètres obtenus lors de la recherche décrite à la section 3. Les différentes notations utiles sont résumées sur la tableau de variation ci-après A.1 et correspondent à un potentiel du type présenté sur la figure 2.5. Plus précisément, v_0 est le minimum local de \mathcal{W} dont la valeur est $\mathcal{W}(v_0; \boldsymbol{\lambda}, c) = \mu_0$ et v_s est son maximum local dont la valeur est $\mathcal{W}(v_s; \boldsymbol{\lambda}, c) = \mu_s$. Le point v^s est la seconde solution de l'équation $\mu_s - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c) = 0$. Enfin v_2 et v_3 sont les valeurs minimale et maximale de l'onde périodique de paramètres $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$.

v	v_1	v_s	v_2	v_0	v_3	v^s
\mathcal{W}'	+	0	-	0	+	
\mathcal{W}		μ_s		μ_0		μ_s

TABLE 2.2. Variations du potentiel \mathcal{W} .

Les variations présentées sur la table A.1 correspondent en particulier au cas de l'équation de KdV pour laquelle le potentiel est un polynôme de degré 3. Les différentes valeurs v_0, v_s puis v_1, v_2, v_3 quand μ est fixé, sont obtenues par méthodes de Newton de tolérance $\varepsilon = 10^{-10}$. Avec ces notations, l'intégrale d'action se réécrit

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = 2 \int_{v_2}^{v_3} \sqrt{2\kappa(v)(\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))} dv.$$

Afin de calculer numériquement cette intégrale et ses dérivées partielles par rapport à $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$, il convient de prêter aux bords $v = v_2$ et $v = v_3$. En effet, même si l'intégrale d'action ci-dessus ne présente pas de singularités au sens où l'intégrale est continue jusqu'aux bords, ce n'est pas le cas de certaines quantités comme la période, les valeurs moyennes ou encore la moyenne du moment qu'il faudra pourtant calculer :

$$\Xi = 2 \int_{v_2}^{v_3} \sqrt{\frac{\kappa(v)}{2(\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))}} dv,$$

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{U} \rangle = \frac{2}{\Xi} \int_{v_2}^{v_3} v \sqrt{\frac{\kappa(v)}{2(\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))}} dv,$$

$$\langle \mathbf{U}^2 \rangle = \frac{2}{\Xi} \int_{v_2}^{v_3} v^2 \sqrt{\frac{\kappa(v)}{2(\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))}} dv.$$

On commence par normaliser l'intervalle d'intégration, ce qui permettra de conserver une précision identique pour tous les exemples de puits de potentiel que nous pourrions étudier et qui a surtout l'avantage de désingulariser ces intégrales. On effectue pour cela le changement de variable, comme dans [32, 22],

$$v(\omega) = \frac{v_3 + v_2}{2} + \frac{v_3 - v_2}{2} \sin \omega.$$

L'intégration numérique sera donc faite sur l'intervalle $] -\pi/2; \pi/2[$, avec un nombre de points fixé pour toutes les valeurs de v_2 et v_3 que l'on pourra rencontrer. On verra que ce nombre de points n'est pas nécessairement élevé, plusieurs centaines peuvent suffire. Afin de préciser la désingularisation, on écrit

$$\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c) = (v_3 - v)(v - v_2) \mathcal{R}(v, v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c),$$

où

$$(72) \quad \mathcal{R}(v, v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c) = \int_0^1 \int_0^1 t \partial_v^2 \mathcal{W}(v^2 + t(v_3 - v_2) + ts(v - v_3); \boldsymbol{\lambda}, c) ds dt,$$

ne s'annule pas si on a pris soin de sélectionner les points v_2 et v_3 de sorte que $\mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c) < 0$ pour $v_2 < v < v_3$, voir table A.1. L'intégrale d'action s'écrit alors

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = (v_3 - v_2)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\kappa(v(\omega)) \mathcal{R}(v(\omega), v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c) / 2} \cos^2(\omega) d\omega.$$

De la même manière, pour n'importe quelle fonction régulière ϕ , on peut écrire une formulation intégrale sans singularités de la manière suivante

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\Xi} \int_0^\Xi \phi(v) dv = \frac{2}{\Xi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi(v(\omega)) \sqrt{\frac{\kappa(v(\omega))}{2 \mathcal{R}(v(\omega), v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c)}} d\omega.$$

En pratique, on ne calculera pas la fonction \mathcal{R} à partir de sa formulation (72) mais plutôt à partir de la relation

$$(73) \quad \mathcal{R}(v, v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c) = \frac{\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c)}{(v_3 - v)(v - v_2)},$$

afin de limiter le temps de calcul en économisant une double intégration. Même si la fonction \mathcal{R} est régulière aux deux extrémités de l'intervalle v_2 et v_3 , d'un point de vue numérique, la relation (73) diverge lorsque $v = v_2$ et $v = v_3$ en raison de l'erreur commise lors de leur évaluation par méthode de Newton de tolérance ε , en tant que solutions de

$$\mu - \mathcal{W}(v_2; \boldsymbol{\lambda}, c) = \mu - \mathcal{W}(v_3; \boldsymbol{\lambda}, c) = 0.$$

Si l'intervalle est discrétisé en $v^i, 0 \leq i \leq n$ avec donc $v^0 = v_2$ et $v^n = v_3$, on calcule numériquement la fonction \mathcal{R} à partir de la relation (73) sur l'intervalle $[v_2 + \frac{\pi}{n}, v_3 - \frac{\pi}{n}]$ et on effectue une extrapolation à l'ordre 1 pour les deux extrémités

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(v_2, v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c) &= 2\mathcal{R}(v^1, v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c) - \mathcal{R}(v^2, v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c), \\ \mathcal{R}(v_3, v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c) &= 2\mathcal{R}(v^n, v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c) - \mathcal{R}(v^{n-1}, v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c). \end{aligned}$$

Pour le calcul numérique de ces intégrales, on s'est contenté de la méthode des trapèzes, la méthode de Simpson n'ayant pas apporté de précision supplémentaire. La méthode des trapèzes est particulièrement adaptée aux calculs d'intégrales de fonctions périodiques sur leur période. On présentera une estimation de l'erreur relative commise à la section 6.1.

Dans un second temps, on calcule les dérivées secondes de l'action par différences finies d'ordre 2. Pour plus de clarté, les dérivées sont calculées dans les variables abstraites définies dans la table A.2 qui présente l'intérêt d'être valable pour les deux cas $N = 1, 2$.

Plus précisément, pour $N = 1$, les variables de l'action sont (μ, λ, c) et pour $N = 2$, elles sont notées $(\mu, \lambda_1, \lambda_2, c)$. Dans les deux cas on utilise un réseau de 3^{N+2} points avec un pas de dérivation noté $\Delta\nu$ pour n'importe quelle variable $\nu \in \{\mu, \lambda, c\}$. En pratique, la tolérance ε des méthodes de Newton et le pas d'intégration $\Delta\omega$ sont gardés constants dans toute la suite. En revanche, le pas de dérivation $\Delta\nu$ peut varier suivant les cas étudiés. On verra que le choix relatif des pas de discrétisation peut entraîner certaines imprécisions numériques. Ces choix seront discutés en détail dans la suite de ce x, mais on peut d'ores et déjà fournir une rapide explication de ce phénomène numérique. La méthode d'intégration présente une erreur de discrétisation relative au pas $\Delta\omega$ d'ordre exponentiel puisque l'on met en œuvre la méthode des trapèzes sur des fonctions périodiques (voir [120]). Cette erreur est toujours présente lors du calcul de dérivées, qui lui fait intervenir une erreur liée au pas de discrétisation $\Delta\nu$. On ne peut pas choisir un pas $\Delta\nu$ trop petit par rapport au pas $\Delta\omega$ étant donné l'ordre dans lequel sont réalisées les deux opérations. Autrement dit, on ne peut demander plus de précision sur la seconde opération que celle dont l'on dispose à la suite de la première. On reverra ce phénomène expliqué quantitativement dans le cas de l'équation de KdV.

Une attention particulière est portée au calcul de la matrice hessienne de l'action $\text{Hess}\Theta$. En effet, comme présenté précédemment à la section 2, les critères de stabilité sont tous liés à cette matrice. La stabilité modulationnelle dépend des *vitesse caractéristiques* (ou valeurs propres) du système d'équations modulées de Whitham qui, d'après [21, Proposition 2] sont les valeurs propres de la matrice \mathbf{D} définie par

$$(74) \quad \mathbf{D} = c\mathbf{Id} + \Xi (\text{Hess}\Theta)^{-1} \mathbf{S},$$

où la matrice \mathbf{S} est définie dans les cas $N = 1$ et 2 respectivement par

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une difficulté numérique supplémentaire vient du fait que les dérivées de Θ « explosent » près de la limite soliton $\mu \rightarrow \sup I(\lambda, c)$. De plus, les propriétés de stabilité orbitale sont caractérisées par le signe de certains mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$, qui permettent de déterminer sa signature négative, c'est-à-dire son nombre de directions négatives par la règle de Sylvester.

L'expérimentation numérique se déroule de la façon suivante

- (1) Dans un premier temps, on recherche un ensemble de paramètres (λ, c) pour lequel on a des ondes périodiques.
- (2) Pour chaque $N + 1$ -uplet (λ, c) , on calcule numériquement les données du *puits de potentiel* : l'intervalle $I(\lambda, c)$ associé ainsi que les zéros de $\mu - \mathcal{W}$, v_1 , v_2 et v_3 .
- (3) Pour chaque $\mu \in I(\lambda, c)$, on calcule l'action $\Theta(\mu, \lambda, c)$ par intégration numérique puis les différentes quantités qui lui sont associées :
 - la matrice hessienne $\text{Hess}\Theta$ par différences finies d'ordre 2
 - les dérivées premières de l'action associées à des quantités moyennées, par différences finies d'ordre 2 :

$$(75) \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\mu} = \Xi, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial c} = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx, \quad \nabla_\lambda \Theta = \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx.$$

Chacune des dérivées ci-dessus est calculée à partir d'un réseau à 3^{N+2} points, avec $N = 1, 2$. Les matrices hessiennes avec lesquelles nous travaillons sont donc de taille 3 ou 4.

- (4) On calcule les valeurs propres de la matrice \mathbf{D} du système de Whitham (74) en fonction du paramètre μ à $(\boldsymbol{\lambda}, c)$ fixé, ainsi que les mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ impliqués dans l'évaluation des critères 2 et 4 de stabilité orbitale.

Puisque l'on dispose également de la période Ξ en fonction du paramètre μ (voir étape (3)), il est possible, et plus commode, d'afficher tous les résultats en fonction soit de la période, soit de ce que l'on appelle le nombre d'onde normalisé défini par

$$k = \frac{\Xi_0}{\Xi},$$

où Ξ_0 est la période minimale des ondes correspondant au régime harmonique

$$\Xi_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\kappa(v_0)}{\partial_v^2 \mathcal{W}(v_0; \boldsymbol{\lambda}, c)}}.$$

Le nombre d'onde normalisé présente l'avantage de fixer l'échelle d'observation entre 0 et 1 pour l'ensemble des ondes comprises entre le régime soliton et le régime harmonique. Ce nombre normalisé est défini de telle manière qu'il vaut 1 pour l'onde limite dans le régime harmonique et 0 quand la période tend vers l'infini. Bien-sûr, cela sous entend de vérifier la bijectivité de la fonction $\mu \mapsto \Xi$ à $(\boldsymbol{\lambda}, c)$ fixés. On verra par la suite des cas avec des valeurs de k strictement supérieures à 1 et donc pour lesquels la période n'est pas une fonction monotone selon μ .

Les courbes de spectre et de mineurs principaux en fonction de la période sont simples à analyser. On peut vérifier si les valeurs propres de la matrice \mathbf{D} sont simples et réelles, et compter le nombre de changements de signe entre les mineurs principaux pour en déduire la signature de la matrice $\text{Hess}\Theta$. Cette analyse rapide à l'œil peut également être effectuée numériquement, ce qui permet de balayer l'ensemble des paramètres $(\boldsymbol{\lambda}, c)$ obtenus à l'étape (1) et de déterminer où les critères de stabilité sont satisfaits.

En matière d'affichage, pour des raisons de clarté, on choisit le plan en deux dimensions (λ_1, c) . En effet, dans le cas $N = 2$, on fixe en toute généralité $\lambda_2 = 0$. En raison de l'invariance par translation des équations modulées de Whitham, on peut démontrer [22] que les valeurs propres ne dépendent pas du paramètre λ_2 . Par conséquent, le plan (λ_1, c) convient pour les deux dimensions que l'on considère $N = 1, 2$. Les résultats du calcul conduisent, pour n'importe quel type de stabilité, à affecter à chaque couple (λ_1, c) un code couleur :

- cercle **bleu** s'il existe au moins une onde pour $\mu \in I(\lambda_1, c)$ stable, c'est à dire une onde pour laquelle le critère de stabilité correspondant est **satisfait**.
- disque **rouge** s'il existe au moins une onde pour $\mu \in I(\lambda_1, c)$ pour laquelle le critère de stabilité correspondant n'est **pas satisfait**.
- point **vert** s'il existe une onde écartée du calcul pour cause d'**imprécisions numériques**.

Ces trois affichages peuvent se superposer, signifiant alors la présence d'un ensemble d'ondes stables, d'un ensemble d'ondes pour lesquelles le critère de stabilité n'est pas satisfait mais également d'un ensemble d'ondes dont les paramètres n'ont pas permis d'obtenir des résultats satisfaisants. On présente sur la figure 2.6 un exemple de cet affichage où sont présentes différentes combinaisons des codes couleurs décrits ci-dessus.

Concernant l'affichage des valeurs propres de la matrice \mathbf{D} , on s'attend d'après la formulation du système de Whitham (28) en coordonnées (k, α, \mathbf{M}) , décrite en introduction, à ce que dans les deux régimes soliton et harmonique, le système d'équations modulées de Whitham se découple, mettant en évidence la convergence de certaines des valeurs propres vers des quantités remarquables. On doit ainsi observer une convergence de deux valeurs propres vers une valeur commune, la vitesse du soliton c dans la limite soliton et la vitesse

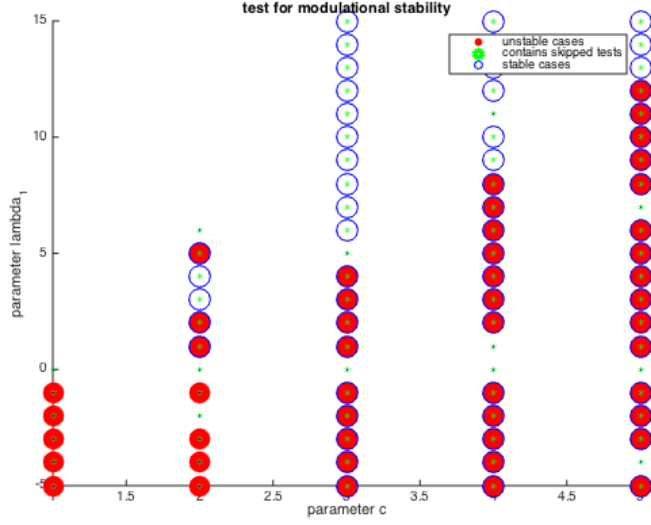


FIGURE 2.6. Exemple d’affichage de tests de stabilité modulationnelle pour un ensemble de paramètres (λ_1, c) .

de groupe $\partial_k \omega$ dans la limite harmonique. Les valeurs propres concernées par la convergence ne sont pas identiques dans les deux régimes. On observe également numériquement la convergence de deux vecteurs propres dans chacune des deux limites.

Ces deux vitesses seront représentées sur toutes les figures de valeurs propres suivantes par des tirets respectivement rouges dans la limite soliton et et verts dans la limite harmonique. On représentera aussi en pointillés rouges (soliton) et verts (harmonique) respectivement les vitesses limites sans dispersion données par $(p'(v_0), p'(v_s))$ pour $N = 1$ et par $(-\sqrt{p'(v_0)}, \sqrt{p'(v_0)}, -\sqrt{p'(v_s)}, \sqrt{p'(v_s)})$ dans le cas $N = 2$. Ces convergences établies théoriquement nous permettrons d’évaluer la précision de nos résultats dans les deux régimes limites.

Pour l’affichage du spectre de la matrice \mathbf{D} dans le plan complexe, on choisit un dégradé de couleurs allant des couleurs claires dans le régime harmonique aux couleurs sombres dans le régime soliton. Les vitesses de groupes et du soliton seront représentées sur ces figures respectivement par une croix verte et une croix rouge.

Finalement, concernant les courbes représentant les mineurs principaux, les quantités représentées seront notées

$$m_1 = \Theta_{\mu\mu}, \quad m_2 = \Theta_{\mu\mu}\Theta_{\lambda\lambda} - \Theta_{\lambda\mu}^2, \quad \text{et} \quad m_3 = \det \text{Hess}\Theta,$$

dans le cas $N = 1$, et

$$M_1 = \Theta_{\mu\mu}, \quad M_2 = \Theta_{\mu\mu}\Theta_{\lambda_1\lambda_1} - \Theta_{\lambda_1\mu}^2, \quad M_3 = \begin{vmatrix} \Theta_{\mu\mu} & \Theta_{\mu\lambda_1} & \Theta_{\mu\lambda_2} \\ \Theta_{\lambda_1\mu} & \Theta_{\lambda_1\lambda_1} & \Theta_{\lambda_1\lambda_2} \\ \Theta_{\lambda_2\mu} & \Theta_{\lambda_2\lambda_1} & \Theta_{\lambda_2\lambda_2} \end{vmatrix}, \quad M_4 = \det \text{Hess}\Theta,$$

dans le cas $N = 2$. Ces mineurs seront représentés en échelle logarithmique et leur signe sera indiqué par une couleur bleue pour positif, et rouge pour négatif.

Dans la suite de cette section, on présente des résultats de stabilité orbitale et modulationnelle pour différents systèmes correspondants à $N = 1, 2$. On commencera par deux cas de validation avant de passer à des systèmes pour lesquels les résultats analytiques ne sont pas connus.

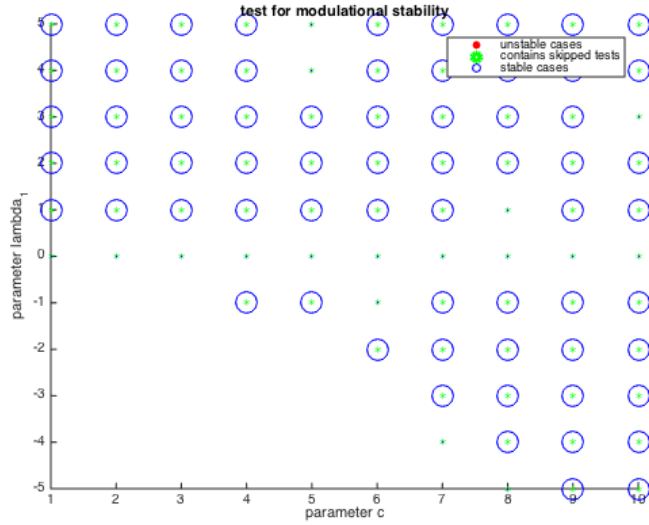


FIGURE 2.7. Résultats de l'étude de stabilité modulationnelle pour l'équation de KdV et pour les paramètres $c \in [1; 10]$, $\lambda \in [-5; 5]$.

4.2. Deux tests de validation : KdV et NLS

Afin de valider les méthodes numériques employées, on s'intéresse en particulier à l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) et l'équation de Schrödinger non-linéaire cubique (NLS). Ces deux cas particuliers sont complètement intégrables au sens où ces équations admettent une infinité de lois de conservation et leur solution est donnée par *inverse scattering transform*, voir Dubrovin [47]. Pour ces systèmes complètement intégrables, on dispose de formules explicites à l'aide de fonction elliptiques qui donnent les vitesses caractéristiques du système de Whitham associé. Ces formules sont décrites par Kamchatnov [82, chapitres 3.5, et 5.1] pour (KdV) et par El, Geogjaev, Gurevich & Krylov dans [51] pour (NLS).

Pour l'équation de KdV, $p(v) = 3v^2$ et $\kappa \equiv 1$. L'équation de NLS est liée au système d'Euler–Korteweg à travers la transformation de Madelung, en choisissant $p(v) = 1/(2v^2)$ et $\kappa(v) = 1/(4v^4)$.

Commençons par l'équation de KdV

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0.$$

On fixe donc $N = 1$, $p(v) = 3v^2$ et $\kappa(v) = 1$. L'ensemble des paramètres (λ, c) admissibles (pour lesquels le potentiel \mathcal{W} admet un minimum local) pour cette équation est représenté sur la figure 2.4 (à gauche). Bien évidemment, l'ensemble des paramètres admissibles ne peut pas être testé de façon exhaustive du point de vue numérique. Il faut garder en tête que pour chaque couple (λ, c) présent sur cette figure, un ensemble d'ondes périodiques est testé, en général un échantillon de 50 ondes périodiques. On choisit donc d'étudier les paramètres admissibles contenus dans l'ensemble $\{1 \leq c \leq 10; -5 \leq \lambda \leq 5\}$. Les résultats de stabilité modulationnelle et orbitale sont présentés respectivement sur les figures 2.7 et 2.8. Pour l'équation de KdV, on sait [122, 26] que toutes les ondes périodiques sont stables, à la fois modulationnellement et orbitalement. Les résultats obtenus le confirment. Remarquons tout de même que pour certains paramètres, le calcul n'a pas été probant, notamment pour $\lambda = 0$ pour lequel la convergence de la méthode de Newton est mise en défaut.

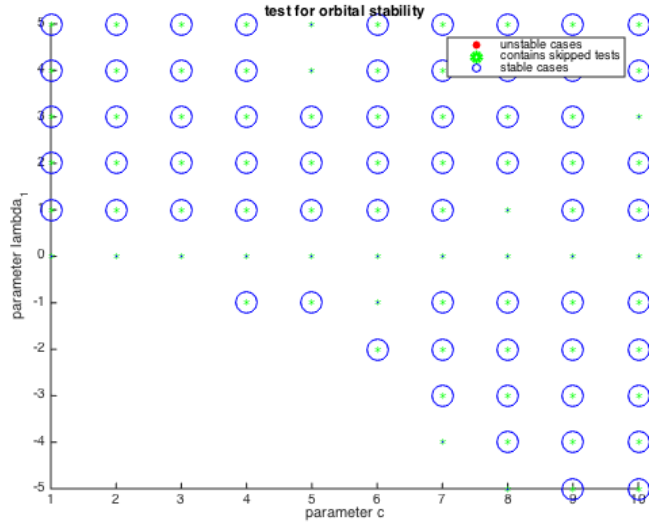


FIGURE 2.8. Résultats de l'étude de stabilité orbitale pour l'équation de KdV et pour les paramètres $c \in [1; 10]$, $\lambda \in [-5; 5]$.

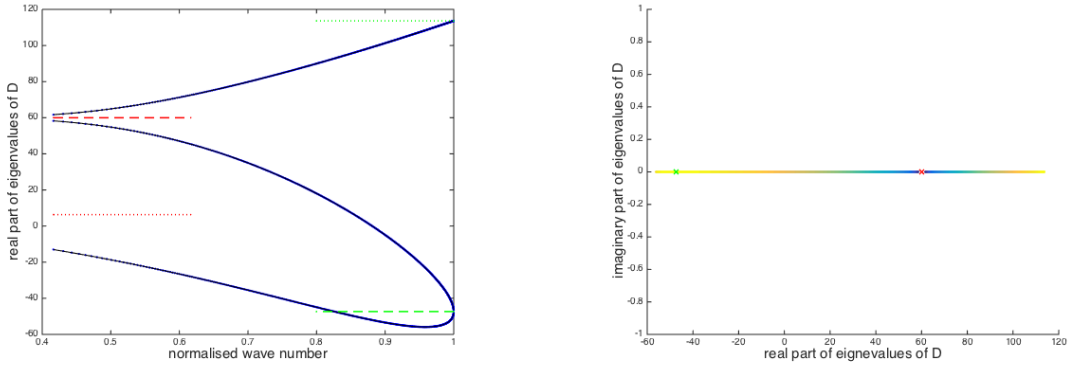


FIGURE 2.9. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation de KdV en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 60$, $\lambda = -60$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. Résultats obtenus pour $n = 500$ points d'intégration et un pas de dérivation $\Delta\nu$ variant linéairement de 10^{-2} côté harmonique à 10^{-3} côté soliton.

On peut également se concentrer sur l'étude d'un cas particulier. Prenons par exemple le cas $c = 60$ et $\lambda = -60$ (fig. 2.9 et 2.10) correspondant aux résultats présentés dans l'annexe A, section 6.2.1.

On observe bien trois parties réelles distinctes pour les valeurs propres de la matrice \mathbf{D} du système d'équations modulées de Whitham. Les valeurs propres théoriques calculées à partir des formules explicites de [82] sont également représentées en noir mais sont totalement indiscernables en raison de la quasi parfaite superposition des résultats numériques approchés. Une autre vérification consiste à comparer le comportement des valeurs propres dans les régimes extrêmes, grande période correspondant au cas limite du soliton et faible amplitude correspondant au cas limite harmonique. On distingue bien les convergences attendues et décrites ci-dessus. Une difficulté récurrente concernant l'observation du régime

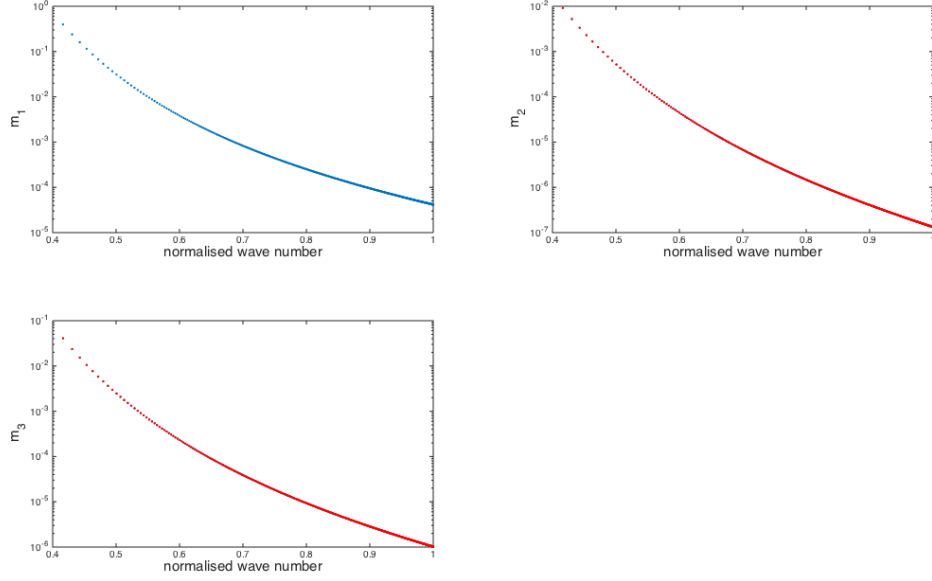


FIGURE 2.10. Valeur absolue des mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation de KdV en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = 60$, $\lambda = -60$ et en échelle logarithmique. La signature négative de la matrice est $N = 1$.

soliton est déjà visible ici. Dans ce régime, la matrice hessienne $\text{Hess}\Theta$ diverge, rendant tout calcul relatif à ce régime ardu. Le fait qu'on ne puisse pas observer de nombre d'onde inférieur à 0.4, sera décrit plus précisément ci-dessous pour (NLS).

Concernant la stabilité orbitale co-périodique, observons les mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ et comparons les aux exigences du critère 2. On distingue nettement

$$\Theta_{\mu\mu} > 0, \quad \begin{vmatrix} \Theta_{\lambda\lambda} & \Theta_{\mu\lambda} \\ \Theta_{\lambda\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{vmatrix} < 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) < 0,$$

ce qui permet de vérifier que la signature négative de la matrice est bien égale à $N = 1$. Ces résultats concordent donc avec ceux trouvés de façon théorique par Johnson dans [77].

Sur la figure 2.11, on représente l'erreur relative sur le calcul du déterminant de $\text{Hess}\Theta$, quantité qui atteste de la précision sur le calcul même de la matrice. Même si cette erreur reste faible, moins de 0.1%, on distingue une imprécision grandissante à mesure que l'on s'approche de la limite harmonique. Rappelons que le pas de discrétisation $\Delta\omega$ relatif à l'intégration numérique est gardé fixe. En pratique, on observe une augmentation du conditionnement de la matrice ainsi que de l'erreur sur le déterminant en faible amplitude à mesure que le pas de discrétisation $\Delta\nu$ de différences finies diminue. Dans le cas de systèmes pour lesquels il ne sera pas possible de comparer directement les valeurs du déterminant de $\text{Hess}\Theta$ avec une valeur théorique, on pourra tirer parti d'observations de son conditionnement pour évaluer la précision des résultats obtenus. Comme annoncé précédemment, l'imprécision observée ici est due aux choix relatifs des pas de discrétisation.

Discutons maintenant du cas de l'équation de Schrödinger non-linéaire cubique

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\partial_x^2\psi = \psi|\psi|^2,$$

dont la formulation fluide via la transformation de Madelung

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}, \quad \varphi_x = u,$$

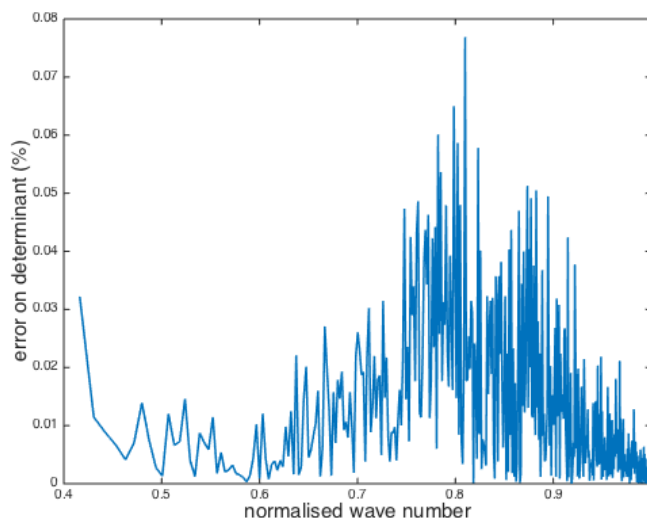


FIGURE 2.11. Erreur relative sur le déterminant de la matrice $\text{Hess}\Theta$ en pourcentage en fonction du nombre d'onde normalisé. Cas de l'équation de KdV pour $c = 60$ et $\lambda = -60$ fixes.

puis le passage aux coordonnées lagrangiennes de masse donne le système d'Euler-Korteweg avec $p(v) = 1/(2v^2)$ et $\kappa(v) = 1/(4v^4)$. Tous les calculs seront effectués dans les variables abstraites décrites table A.2 et, grâce à l'invariance par translation selon le paramètre λ_2 , on fixera en toute généralité $\lambda_2 = 0$. On travaillera donc uniquement avec $(\mu, \lambda_1, c) \in \mathbb{R}^3$ pour paramétrer les ondes, bien que le calcul de dérivées nous oblige à considérer la direction λ_2 . Ce cas particulier de l'équation de NLS va permettre de mettre en évidence une difficulté numérique récurrente déjà présente dans le cas de (KdV) : la divergence de $\text{Hess}\Theta$ dans le régime soliton. Commençons par observer l'erreur sur le déterminant de la matrice $\text{Hess}\Theta$ sur la figure 2.12 pour le cas particulier $c = -1$, $\lambda_1 = 2.5$. On voit ici un phénomène différent de celui de l'équation de KdV, l'erreur explose dans le régime des grandes périodes. La divergence des dérivées secondes de Θ dans la limite soliton implique, dans notre méthode numérique, la manipulation de grands nombres. C'est pour cette raison que les résultats obtenus dans ce régime sont, de manière générale, difficilement exploitables.

Pour appuyer ces propos, observons les résultats de stabilité pour ce même cas particulier fig 2.13 et 2.14. On voit tout de suite sur les valeurs propres du système d'équations modulées de Whitham la perte de précision dans la limite soliton. Pour l'équation de NLS, complètement intégrable, l'analyse est très facile puisque l'on connaît de manière théorique ces valeurs propres (en noir sur la figure). On constate numériquement une convergence de l'ensemble des valeurs propres vers la vitesse c du soliton alors que seulement deux d'entre elles devraient avoir cette propriété. Ce phénomène est essentiellement dû au comportement asymptotique de la matrice $\text{Hess}\Theta$ dans la limite soliton. À cause de l'imprécision relative à la manipulation de grands nombres dans la limite soliton, les valeurs propres de l'inverse $\text{Hess}\Theta^{-1}$ tendent numériquement toutes vers zéro, ce qui explique le spectre obtenu pour la matrice \mathbf{D} . Néanmoins, les résultats sont cohérents avec les résultats analytiques de [76] puisque le spectre de la matrice \mathbf{D} est simple et réel dans la gamme de période observée, et que la signature de la matrice $\text{Hess}\Theta$ est bien $N = 2$ à la vue des deux changements de signe des mineurs principaux observables sur la figure 2.14. On vérifie également par précaution la condition du critère 3 : $\Theta_{\lambda_1\lambda_1} \neq 0$ pour confirmer la simultanéité des stabilités en coordonnées eulériennes et lagrangiennes. En résumé, on observe

$$\Theta_{\mu\mu} > 0, \quad \Theta_{\lambda_1\lambda_1} > 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) > 0, \quad n(\text{Hess}\Theta) = 2,$$

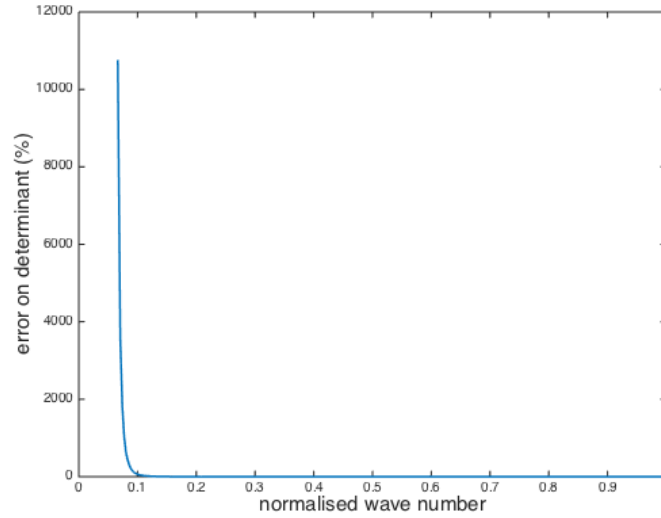


FIGURE 2.12. Erreur relative sur le déterminant de $\text{Hess}\Theta$ en pourcentage et en fonction du nombre d'onde normalisé. Cas de l'équation de NLS pour $c = -1$ et $\lambda_1 = 2.5$ fixes. $n = 500$ et $\Delta\nu$ varie linéairement de 10^{-4} côté harmonique à 10^{-8} côté soliton.

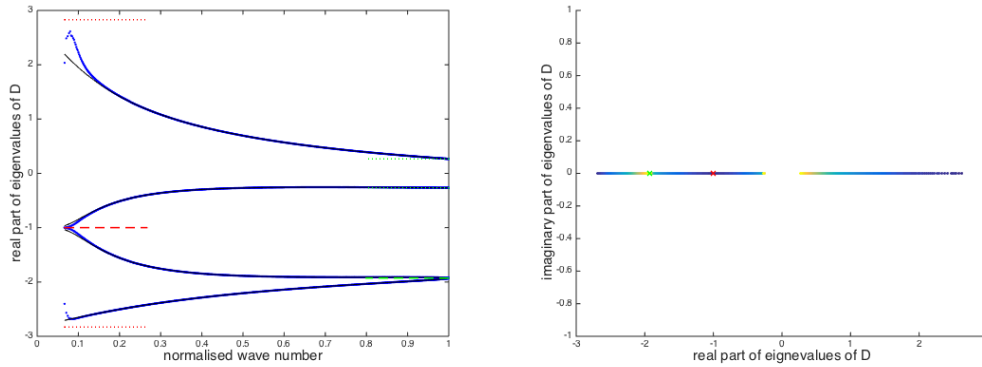


FIGURE 2.13. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation de NLS en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = -1$, $\lambda_1 = 2.5$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$ et $\Delta\nu$ varie linéairement de 10^{-4} côté harmonique à 10^{-8} côté soliton.

ce qui confirme bien la stabilité orbitale co-périodique.

Finalement, la divergence de la matrice $\text{Hess}\Theta$ dans la limite soliton nous force à étudier une gamme de période limitée. Cependant, cette gamme de période n'est pas connue au préalable et c'est l'observation a posteriori des résultats qui permet d'établir ou non leur validité. Encore une fois, dans le cas de l'équation de NLS où les valeurs propres du système de Whitham sont connues, on dispose d'un moyen simple de comparaison, mais pour des systèmes plus généraux, il faudra observer les coefficients de la matrice $\text{Hess}\Theta$, ainsi que son conditionnement, et effectuer plusieurs tests afin d'établir la validité des résultats.

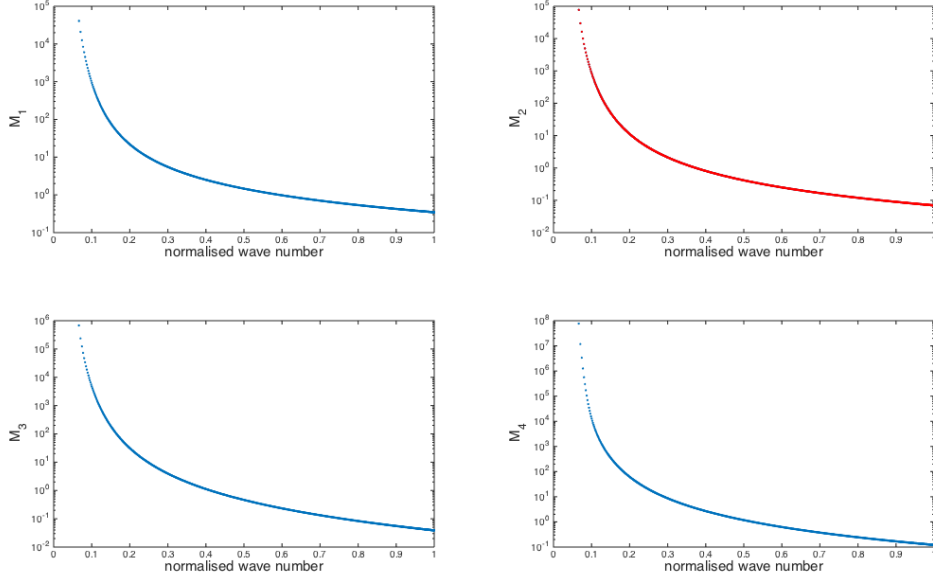


FIGURE 2.14. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation de NLS en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = -1$, $\lambda_1 = 2.5$. La signature négative de la matrice est $N = 2$.

Sur la figure 2.15 (à gauche) est représenté l'ensemble des paramètres (λ_1, c) admissibles calculé numériquement. Dans le cas de NLS, on peut également calculer analytiquement ce domaine. Le potentiel est donné par

$$\mathcal{W}(v; \lambda, c) = \frac{c^2}{2}v^2 - \lambda_1 v - \frac{1}{2v},$$

et le domaine Λ est caractérisé par l'existence de deux zéros distincts de la dérivée

$$\partial_v \mathcal{W}(v; \lambda, c) = c^2 v - \lambda_1 + \frac{1}{2v^2}.$$

Le cas $c = 0$ est donc à exclure immédiatement. Sur la figure 2.15 (à droite) sont représentées la droite de Rayleigh et la loi de pression $p(v) = \frac{1}{2v^2}$. Le cas limite d'existence de zéros à l'équation $\partial_v \mathcal{W} = 0$ correspond aux cas où la droite de Rayleigh est tangente à la courbe de p . À paramètre $c \neq 0$ fixé, on cherche donc le point v_* tel que

$$p'(v_*) = -\frac{1}{v_*^3} = -c^2,$$

et pour lequel

$$c^2 v_* - \lambda_1 + \frac{1}{2v_*^2} = 0.$$

L'équation qui décrit la frontière de Λ , représentée en noir sur la figure 2.15, s'écrit donc

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}c^{4/3}.$$

Sur cette figure, on voit également que le cas $c = 0$ est exclu. On remarque également que certains paramètres c proches de 0 sont exclus par erreur. Ceci est dû à la limitation de l'amplitude de l'intervalle en v de recherche d'extrema de \mathcal{W} . Plus le paramètre c est petit, autrement dit plus la pente de la droite de Rayleigh est faible, plus cet intervalle de recherche doit être grand, comme le montre la figure de droite 2.15. Comme pour l'équation de KdV, l'étude de stabilité se fait sur un ensemble plus réduit pour des raisons de temps de calcul et les résultats sont présentés sur les figures 2.16 et 2.17.

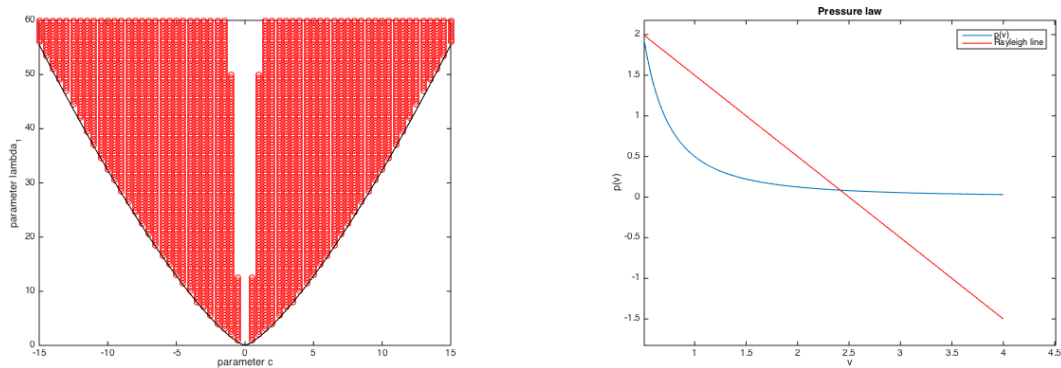


FIGURE 2.15. À gauche, lieu des paramètres (λ_1, c) admissibles pour l'équation de NLS. À droite, loi de pression $p(v) = \frac{1}{2v^2}$ et droite de Rayleigh $v \mapsto -c^2v + \lambda_1$, pour $c = -1$ et $\lambda_1 = 2.5$.

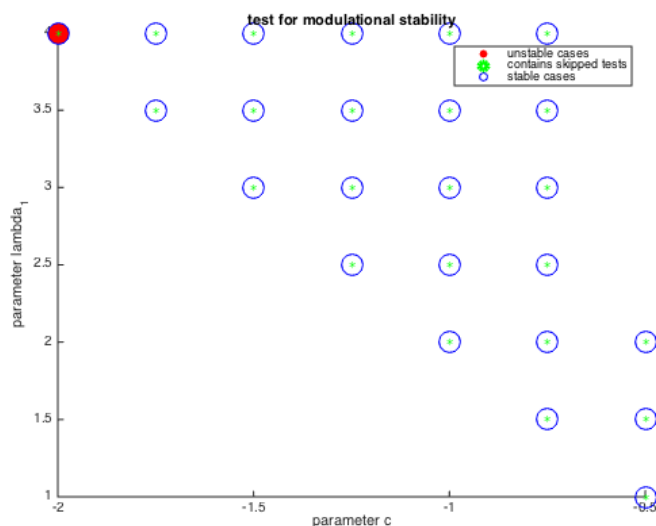


FIGURE 2.16. Résultats de l'étude de stabilité modulationnelle pour l'équation de NLS et pour les paramètres $c \in [-2; -0.5]$, $\lambda \in [1; 4]$.

On voit très bien ici les limites de cette étude de stabilité globale selon un ensemble de paramètres. Plus précisément, l'étude systématique effectuée ne peut en aucun cas prendre en compte les difficultés présentées sur le cas particulier précédent. Même si ce dernier admettait les *bonnes* propriétés de stabilité (cohérentes avec la théorie, voir [55]), on voit très nettement, notamment sur la figure 2.13, que si le calcul était poussé légèrement plus loin côté soliton, les courbes de valeurs propres pourraient « se croiser » et fausser les résultats. Ceci explique la présence du *disque rouge* sur la figure 2.16 établissant la présence d'ondes instables pour les paramètres $c = -2$ et $\lambda_1 = 4$. Il s'agit ici d'une erreur numérique.

En conclusion de l'étude de ces deux cas de validation, on observe des résultats très satisfaisants mais qui sont néanmoins à prendre avec précautions. Deux difficultés numériques ont été identifiées : des incompatibilités dans les pas de discrétisation et une divergence dans la limite soliton. Ces difficultés peuvent être surmontées en étudiant plus

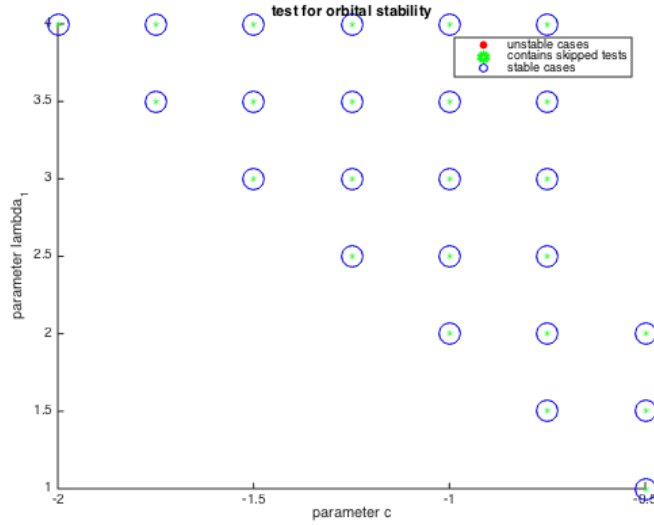


FIGURE 2.17. Résultats de l'étude de stabilité orbitale pour l'équation de NLS et pour les paramètres $c \in [-2; -0.5]$, $\lambda \in [1; 4]$.

en détails les cas pathologiques ou, comme on le verra par la suite pour l'étude du régime soliton, en optant pour une méthode plus adaptée. La principale difficulté restera d'identifier la présence de ces erreurs dans les cas non-intégrables.

5. Plus de résultats numériques

5.1. $N = 1$: équation de Korteweg-de Vries généralisée

On se concentre ici sur l'équation de Korteweg-de Vries *généralisée* (gKdV)

$$v_t + (p(v))_x + v_{xxx} = 0,$$

pour laquelle $\kappa = 1$ et la non-linéarité p est polynomiale

$$p(v) = e(\gamma + 1)v^\gamma, \quad \gamma \geq 2, \quad e = \pm 1.$$

Le signe moins de e correspond au cas dit défocalisant et, en réalité, son introduction n'est pas nécessaire lorsque la puissance γ est paire à cause de la symétrie $(x, t, v) \mapsto (-x, -t, -v)$. Le cas $\gamma = 2$ correspond à l'équation de KdV étudiée précédemment et qui est complètement intégrable. Un autre cas complètement intégrable est l'équation de KdV *modifiée* (mKdV) correspondant à $\gamma = 3$ pour laquelle les résultats de stabilité sont très similaires à ceux de (KdV). On représente sur la figure 2.3 un résumé de l'état de l'art des résultats analytiques de stabilité connus concernant (gKdV).

Les propriétés d'instabilité référencées ici ne représentent que des possibilités et non pas un cas général et absolu. Par exemple, d'après [33], les ondes *dnoidales* de l'équation de KdV modifiée focalisante ($\gamma = 3, e = +1$) sont modulationnellement instables uniquement si l'équation $\mu - \mathcal{W} = 0$, qui est polynomiale de degré 4, n'admet que deux racines. Cela explique aussi l'instabilité des ondes *cnoidales* puisque pour ce type d'onde, cette équation n'a toujours que deux racines (voir fig. 2.18). Dans le cas où cette équation admet bien 4 racines, les ondes (forcément dnoidale) sont stables. La présence d'ondes instables dans la limite harmonique donnée dans le tableau 2.3 ne sera donc pas observée dans la totalité des cas. Les informations concernant la stabilité modulationnelle de (gKdV) sont tirés de

γ	e	Orbital stability			Modulational stability		
		harmonic limit	–	soliton limit	harmonic limit	–	soliton limit
2	+	\checkmark			\checkmark		
3	+	\checkmark (cn)	\checkmark/x (cn)	x(cn)	x(cn)		
	-	\checkmark (dn)			x(dn)	x/\checkmark (dn)	\checkmark (dn)
4	+	?		? (\checkmark soliton)	x	?	
	-	\checkmark (sn)			\checkmark (sn)		
5	+	?			x		
	-	?			?		
6	+	?		x	x	?	

TABLE 2.3. État de l’art des résultats de stabilité pour (gKdV). (\checkmark) signifie stabilité tandis que (x) signifie instabilité. (?) marque les cas pour lesquels on ne dispose pas de résultats. Dans certains cas, la propriété de stabilité peut changer quand la période augmente. Ceci est représenté par (\checkmark/x) si les ondes de passent de stables à instables quand la période augmente, ou (x/\checkmark) dans le cas contraire.

[33, 73, 26, 32]. Concernant la stabilité orbitale co-périodique, voir [4, 44, 104]. Ces données permettront dans un premier temps d’effectuer des comparaisons et vérifications. On pourra ensuite s’attaquer à des problèmes pour lesquels aucun résultat analytique n’est connu.

5.1.1. Équation de KdV modifiée

On considère dans un premier temps l’équation de KdV modifiée

$$v_t \pm 12v^2 v_x + v_{xxx} = 0.$$

À la manière de l’équation de KdV, les solutions de l’équation de mKdV s’expriment à l’aide des fonctions elliptiques de Jacobi sn , cn et dn via la transformation de Miura. Pour plus de détails sur les solutions analytiques de (mKdV), voir [31]. Dans le cas focalisant (signe +), on ne considèrera que les ondes de type dnoïdales et on laissera de côté les ondes cnoïdales. Ces deux types d’ondes sont différenciés par leur *niveau d’énergie* μ comme représenté sur la figure 2.18. Cette figure suggère la possibilité de l’existence de propriétés de stabilité modulationnelle différentes dans la limite harmonique suivant que l’on travaille avec le puits de potentiel contenant le minimum global ou non. En revanche, toutes les ondes dnoïdales sont orbitalement stables d’après [4].

Commençons par le puits contenant le minimum global. Cette configuration est représentée sur la figure 2.19. Comme prouvé par Bronski, Johnson et Kapitula [33], on remarque la présence de valeurs propres complexes conjuguées dans la limite harmonique attestant de l’instabilité modulationnelle des ondes dnoïdales dans ce régime. Sur la figure 2.20, on peut vérifier la stabilité orbitale de ces ondes, étant donné que le critère 2 est satisfait avec

$$\Theta_{\mu\mu} > 0, \quad \begin{vmatrix} \Theta_{\lambda\lambda} & \Theta_{\mu\lambda} \\ \Theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{vmatrix} < 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) < 0.$$

Concentrons-nous maintenant sur le second puits du \mathscr{W} présenté sur la figure 2.18. Les vitesses caractéristiques du système de Whitham associé sont représentées sur la figure 2.21. Ici, aucune onde modulationnellement instable n’est présente, comme prouvé par Bronski, Johnson et Kapitula. De plus, on observe exactement les mêmes propriétés de stabilité orbitale et co-périodique que dans le cas du premier puits de potentiel, ce qui était également attendu.

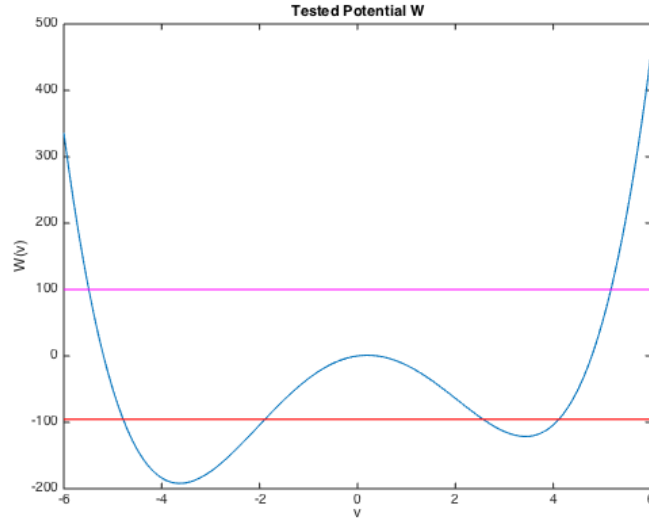


FIGURE 2.18. Potentiel \mathcal{W} (bleu) pour l'équation de mKdV dans le cas focalisant avec $c = 50$ et $\lambda = -10$. Le niveau d'énergie μ rouge correspond à des ondes *dnöidales*, le niveau mauve à des ondes *cnoöidales*.

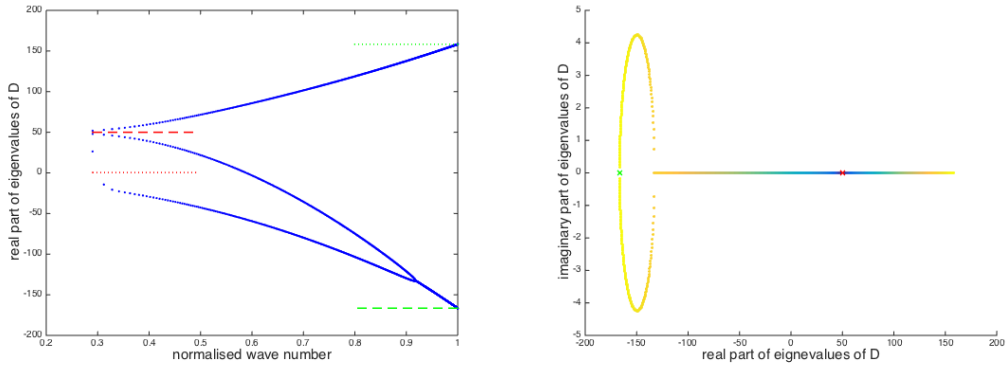


FIGURE 2.19. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation de mKdV focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 50$, $\lambda = -10$ et pour le puits de potentiel de gauche sur la figure 2.18. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$, $\Delta\nu = 10^{-3}$.

Passons maintenant au cas de l'équation de mKdV défocalisante (signe $(-)$ dans la non-linéarité). Ici, les ondes périodiques sont toutes *snoöidales*. D'après Bronski, Johnson, Kapitula [33], elle sont toutes moduellement stables puisque l'équation $\mu - \mathcal{W} = 0$ admet forcément 4 racines. On a également la stabilité orbitale globale pour ce type d'onde (cf. [4]). Les vitesses caractéristiques du système de Whitham sont représentées sur la figure 2.23 et les mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ le sont sur la figure 2.24

Remarque 2.4. On observe très bien ici les difficultés numériques rencontrées dans la limite soliton. Dans tous les cas présentés dans cette section, les vitesses caractéristiques du système de Whitham représentées sur les figures 2.19, 2.21 et 2.23 ne présentent pas le bon comportement dans la limite soliton. Plus précisément, on observe la convergence de

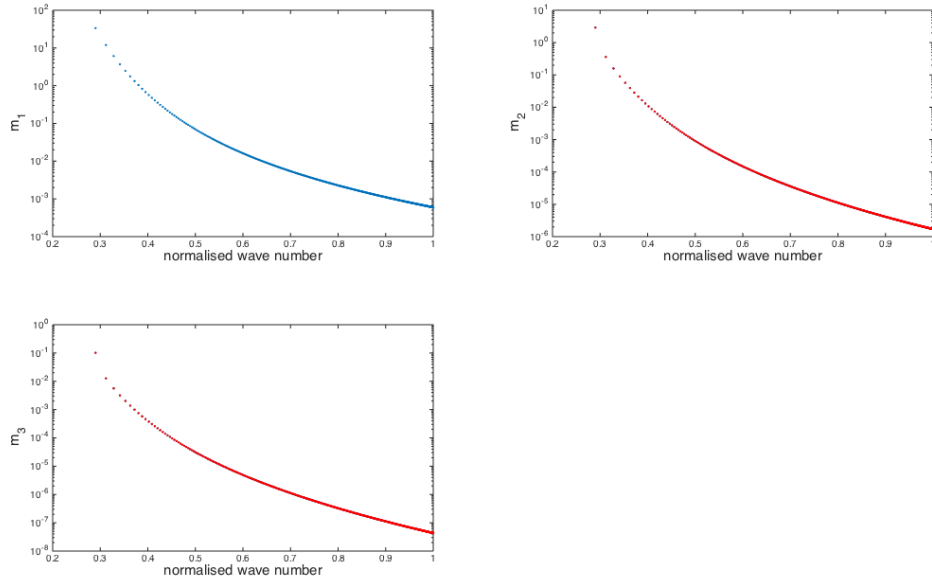


FIGURE 2.20. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation de mKdV focalisante pour le puits de potentiel de gauche sur la figure 2.18 en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = 50$, $\lambda = -10$. La signature négative de la matrice est $N = 1$.

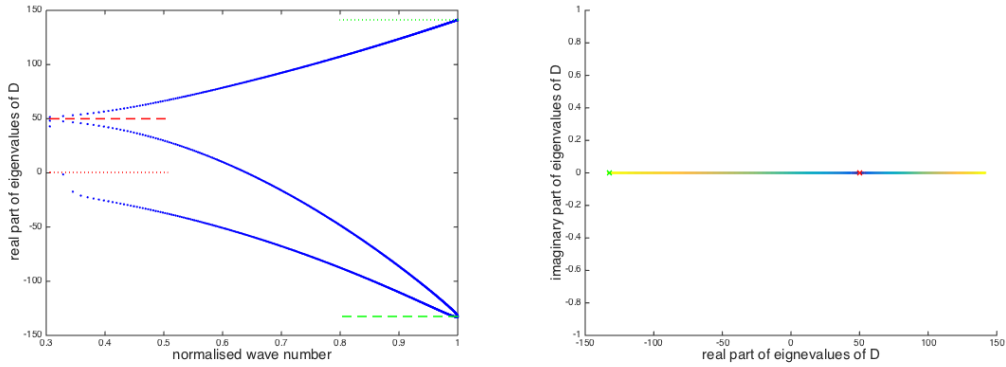


FIGURE 2.21. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation de mKdV focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 50$, $\lambda = -10$ et pour le puits de potentiel de droite sur la figure 2.18. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$, $\Delta\nu = 10^{-3}$.

la totalité du spectre vers la vitesse c du soliton (tirets rouges) alors que l'une des valeurs propres devrait tendre vers la vitesse du système sans dispersion, ici $p'(v_s)$ est représentée en pointillés rouges sur les figures. Dans le cas de l'équation défocalisante, on observe sur même figure 2.23 à droite, la présence de valeurs propres complexes conjuguées dans la limite soliton (quelques points de couleur sombre écartés de l'axe réel) ce qui relève de l'imprécision numérique relative à l'analyse de cette limite. Ce problème numérique avait été mis en évidence pour l'équation de NLS dans la section précédente.

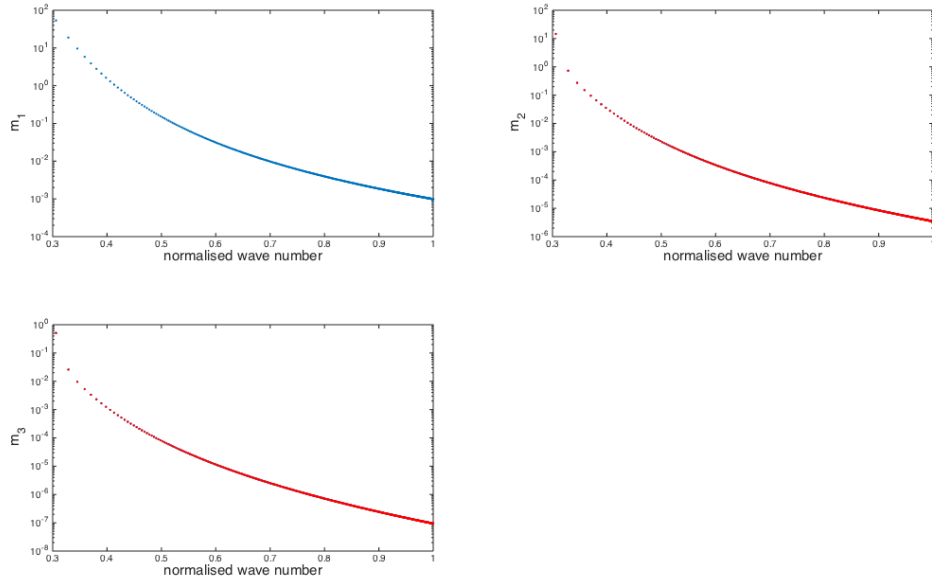


FIGURE 2.22. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation de mKdV focalisante pour le puits de potentiel de droite sur la figure 2.18 en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = 50$, $\lambda = -10$. La signature négative de la matrice est $N = 1$.

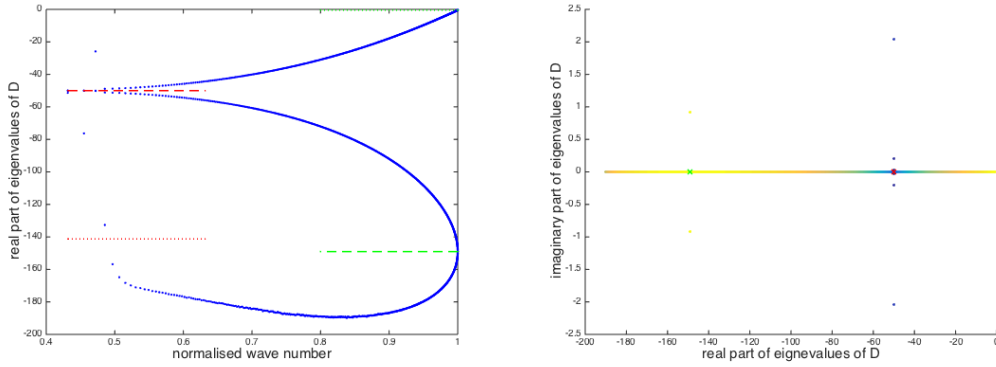


FIGURE 2.23. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation de mKdV défocalisante en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = -50$, $\lambda = 10$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$, $\Delta\nu = 10^{-4}$.

Remarque 2.5. Sur la dernière figure 2.24, on peut distinguer des changements de signes (de couleur) sur les second et troisième mineurs dans la limite soliton. Théoriquement [33], les ondes observées dans ce cas sont stables et ces changements de signe ne devraient donc pas avoir lieu. On peut les associer à la divergence des coefficients de la matrice $\text{Hess}\Theta$ dans ce régime. Néanmoins, dans des cas où aucun résultat théorique n'est connu, ce genre d'analyse sera plus difficile à mener. Il sera parfois même impossible de distinguer une apparente instabilité liée à un artefact numérique d'une réelle instabilité. On verra que ce problème numérique s'aggrave à mesure que la puissance γ de la non-linéarité augmente.

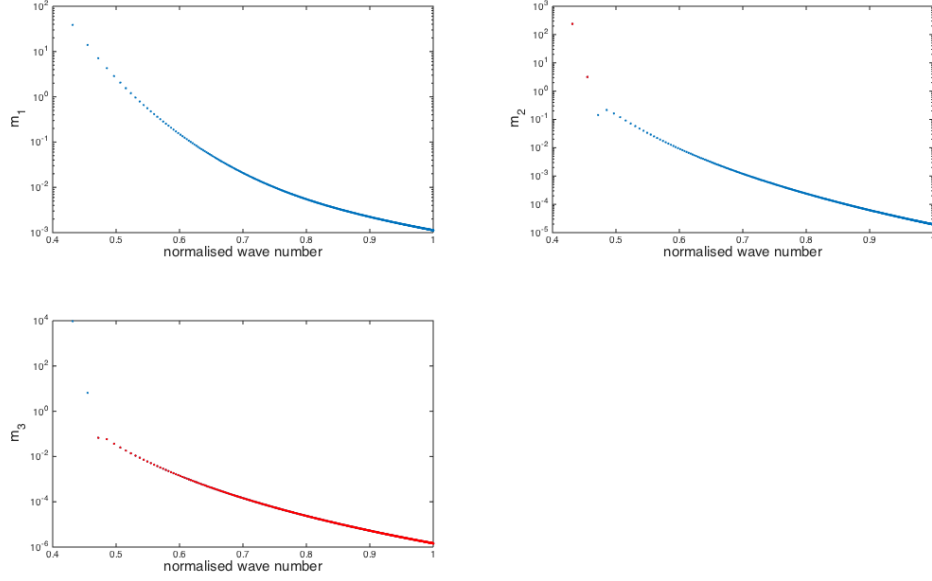


FIGURE 2.24. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation de mKdV défocalisante en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = -50$, $\lambda = 10$. La signature négative de la matrice est $N = 1$.

5.1.2. KdV généralisée $\gamma = 4$

À partir de $\gamma = 4$, beaucoup de propriétés des ondes périodiques sont encore inconnues (cf. table 2.3). L'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante que nous considérons ici s'écrit

$$v_t + (5v^4)_x + v_{xxx} = 0.$$

D'après Pego & Weinstein [104], on sait qu'une onde solitaire solution de cette équation est orbitalement stable. D'après Gardner [61], la stabilité de l'onde solitaire est une condition nécessaire à la stabilité des ondes de grandes périodes. Du point de vue de la stabilité modulationnelle et en accord avec les résultats analytiques de la table 2.3, on s'attend à constater de l'instabilité de faible amplitude uniquement. Le spectre du système de Whitham est représenté sur la figure 2.25

Afin d'évaluer qualitativement la précision de ces résultats dans la limite soliton, on peut également tracer (cf. fig. 2.27) le conditionnement de la matrice $\text{Hess}\Theta$ ainsi que les conditionnements de ses valeurs propres, c'est-à-dire l'inverse du cosinus des angles entre les vecteurs propres à gauche et à droite de la matrice. On constate une forte augmentation des conditionnements dès que le nombre d'onde normalisé devient inférieur à 0.4 environ. On peut mettre en doute les résultats observés pour des nombres d'ondes inférieurs à ce seuil.

En effet, les cas de non-linéarité de puissance paire comme celui que nous traitons ici présentent la particularité de posséder quatre types de portrait de phase différenciés par l'angle des intersections entre la *droite de Rayleigh* et la courbe de pression : soit les deux intersections se produisent avec $p' > 0$ (c'était le cas pour le cas $\lambda < 0$ présenté ci-dessus), soit les deux intersections se font pour $p' < 0$, ou alors le signe de p' est différent pour les deux points d'intersection, et dans ce cas il y a deux cas correspondant à une inversion des signes de p' au point centre et au point selle du plan de phase. La loi $v \mapsto p(v)$ associée à (gKdV), $\gamma = 4$ est présentée sur la figure 2.28, ainsi que la droite de Rayleigh avec $c = 10$ et $\lambda = 3$. Les quatre cas décrits ci-dessus correspondent aux quatre

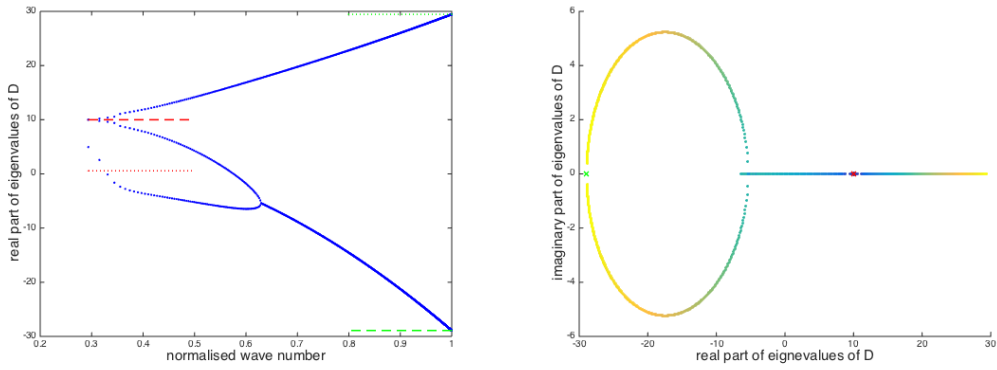


FIGURE 2.25. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 10$, $\lambda = -3$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$ et $\Delta\nu$ varie linéairement de 10^{-3} dans la limite harmonique à 10^{-6} dans la limite soliton.

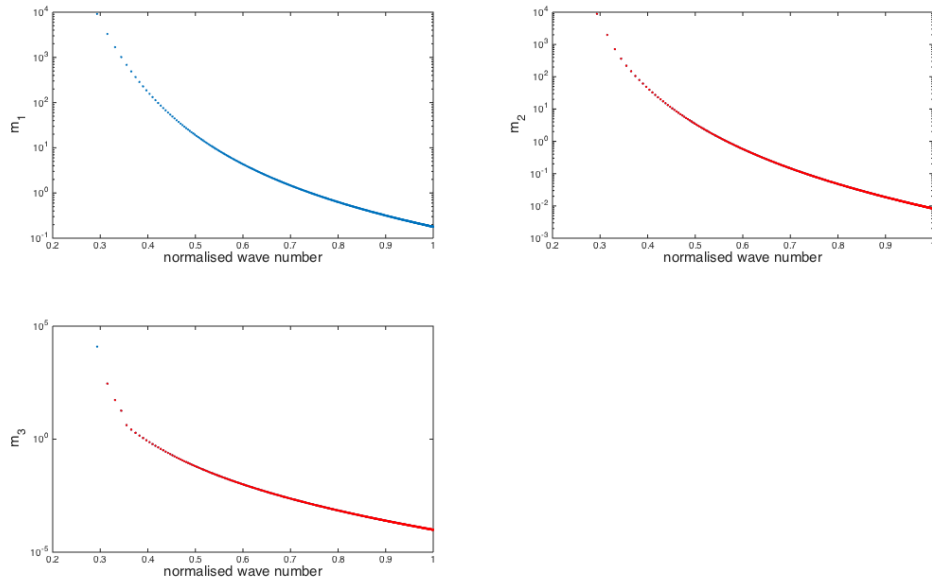


FIGURE 2.26. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = 10$, $\lambda = -3$. La signature négative de la matrice est $N = 1$.

possibilités de signes sur les deux paramètres (λ, c) . On présente sur la figure 2.29 un second extrait de la famille d'ondes périodes associée à (gKdV), $\gamma = 4$, cette fois pour un paramètre $\lambda > 0$, tout en conservant $c > 0$. Cette fois, la totalité de la gamme de période observée est modulationnellement instable. On note encore une fois une légère distorsion des résultats dans la limite soliton, avec une convergence plus rapide qu'elle ne devrait vers la vitesse c . D'un point de vue purement qualitatif, on pourrait même penser que la valeur propre double semble converger vers une moyenne entre la vitesse sans dispersion $p'(v_s)$ (en pointillés rouges) et la vitesse du soliton c (en tirets rouges). En effet, si ces

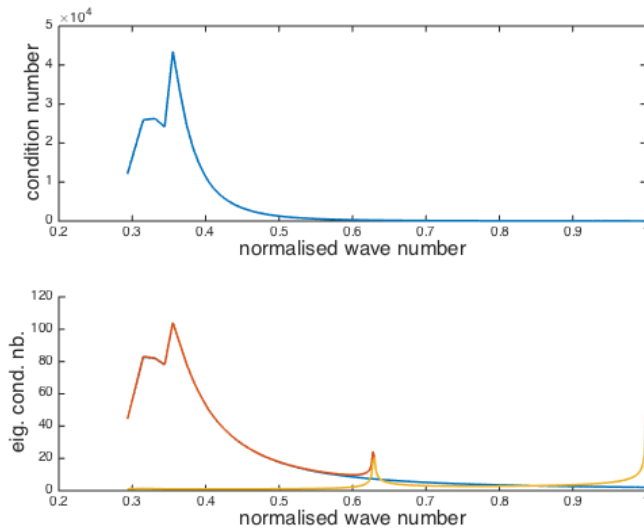


FIGURE 2.27. En haut, conditionnement de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé. En bas, conditionnements par rapport aux valeurs propres en fonction de la période dans le cas $c = 10$, $\lambda = -3$.

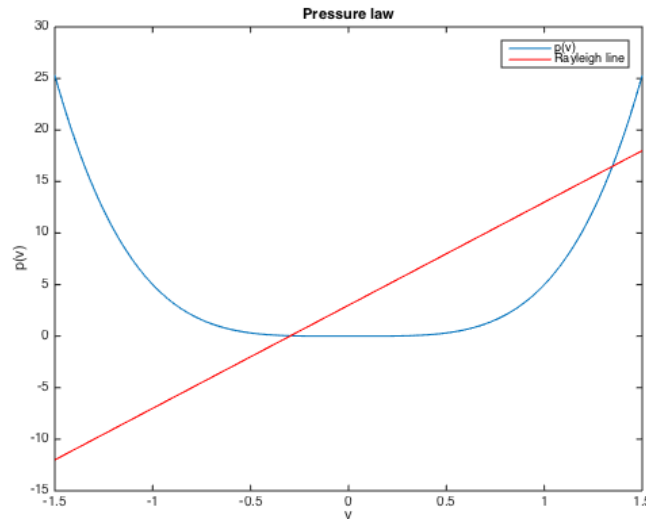


FIGURE 2.28. Loi $v \mapsto p(v)$ pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante (en bleu) et droite de Rayleigh $v \mapsto cv + \lambda$ (en rouge) dans le cas $c = 10$, $\lambda = 3$.

valeurs propres n'étaient pas doubles, on s'attend à cause du découplage du système de Whitham dans les deux régimes limites, à ce qu'elles observent chacune une convergence vers l'une et l'autre de ces vitesses. Les mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour ces paramètres (λ, c) présentent exactement le même comportement que dans le cas précédent (cf. fig. 2.26) et ne sont donc de nouveau pas représentés.

Le troisième cas $c < 0$, $\lambda < 0$, est représenté sur la figure 2.30. Cette fois on observe une stabilité modulationnelle sur toute la gamme de période étudiée puisque le spectre de la matrice du système de Whitham est simple et réel. Les mineurs principaux de $\text{Hess}\Theta$

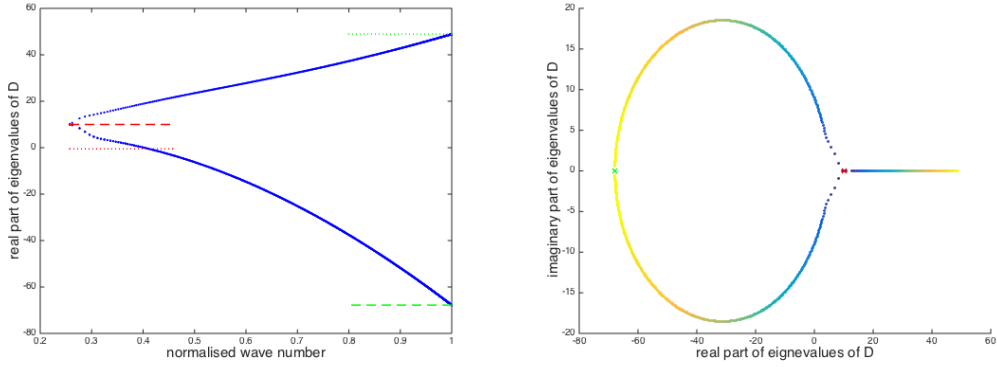


FIGURE 2.29. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 10$, $\lambda = 3$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$, $\Delta\nu = 10^{-3}$.

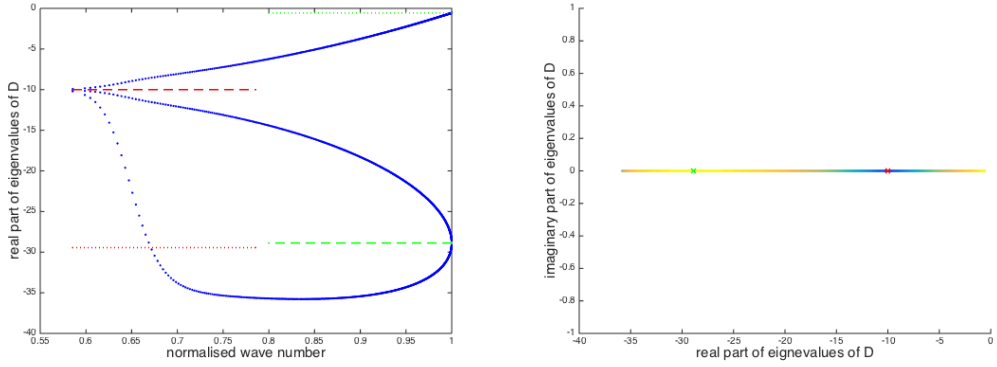


FIGURE 2.30. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = -10$, $\lambda = -3$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$, $\Delta\nu = 10^{-3}$.

n'ont pas tout à fait le même comportement que dans les cas précédents mais attestent toujours de la stabilité orbitale des ondes. On rappelle que la convergence des trois valeurs propres observée dans la limite soliton est un artefact numérique dû à la divergence de la matrice $\text{Hess}\Theta$ dans cette limite. La légère décroissance du second mineur fig. 2.31 est selon toute vraisemblance liée à cette divergence.

Concentrons-nous maintenant sur un dernier cas à observer, c'est-à-dire $c < 0$ et $\lambda > 0$. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 2.32 et 2.33. On observe ici un comportement tout à fait particulier. En effet, la période Ξ , et par conséquent le nombre d'onde normalisé k , ne sont pas monotones en fonction du paramètre μ . L'étude de la monotonie de la période est un sujet relativement classique de dynamique hamiltonienne. Un critère simple assurant la croissance de la période pour le type de hamiltonien que nous étudions est donné par Chicone [36] sous la forme

$$\left(\frac{\mathcal{W}}{(\mathcal{W}')^2} \right)'' > 0.$$

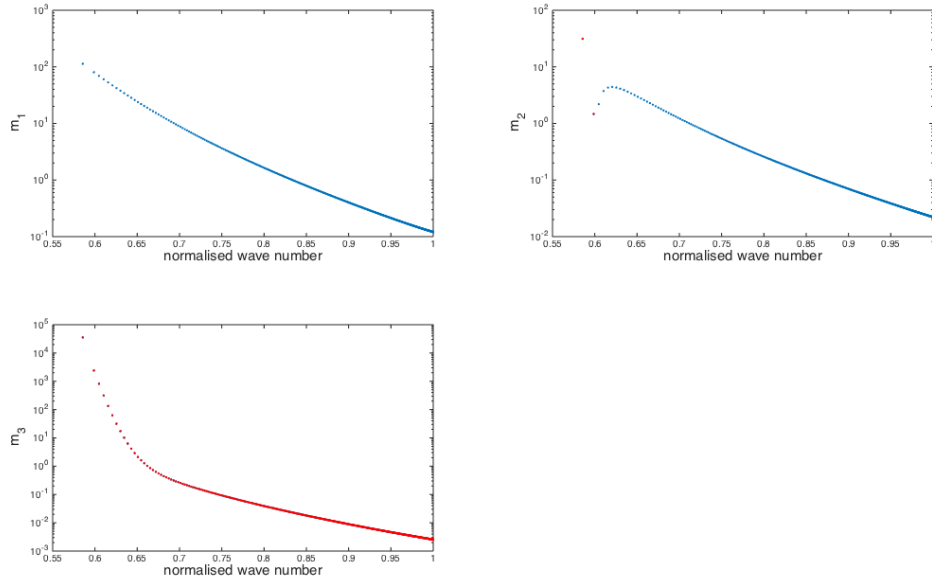


FIGURE 2.31. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = -10$, $\lambda = -3$. La signature négative de la matrice est $N = 1$.

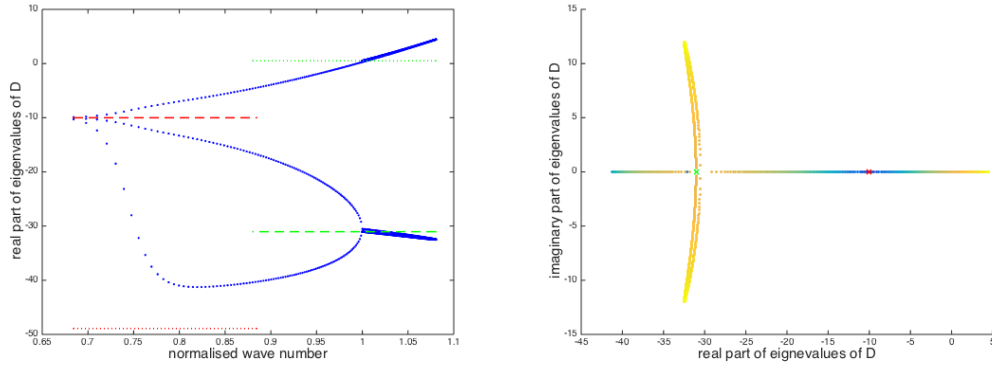


FIGURE 2.32. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = -10$, $\lambda = 3$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$, $\Delta\nu = 10^{-3}$.

Cette propriété n'étant pas évidente à vérifier analytiquement, on se contentera de constater numériquement que la période n'est pas une fonction croissante dans le cas précis que nous décrivons ici. En effet, cette non-monotonie est caractérisée par le *retour* des courbes de spectre et des mineurs vers la valeur $k = 1$ après l'avoir dépassée en faible amplitude. On remarque que les valeurs limites des vitesses sont néanmoins respectées pour $k \rightarrow 1$. Une autre propriété intéressante concerne les mineurs principaux de $\text{Hess}\Theta$. Ici, la signature négative de la matrice présente une transition de la valeur 0 à la valeur 1 au passage par le minimum de la période. Cela signifie que certaines ondes de faible amplitude sont orbitalement instables en plus d'être modulationnellement instables.

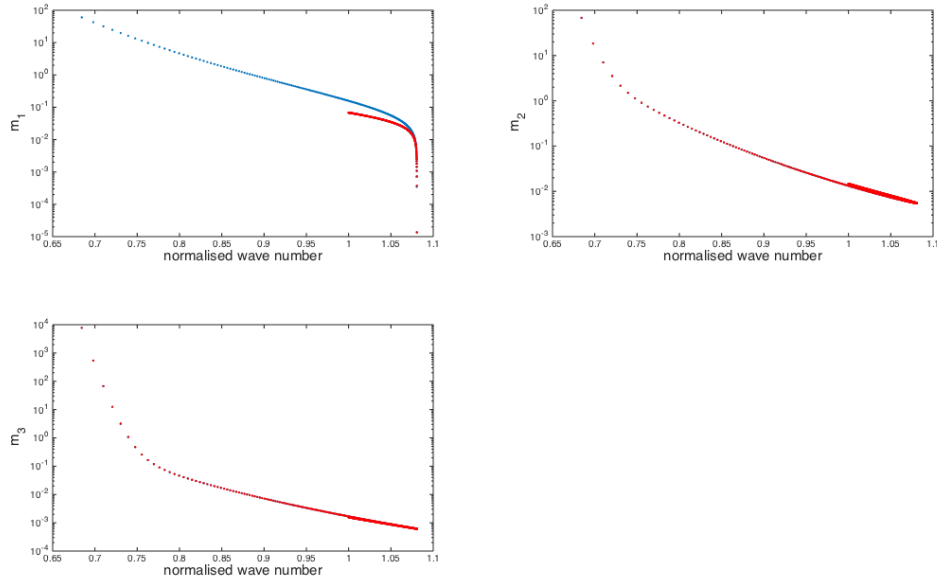


FIGURE 2.33. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = -10$, $\lambda = 3$. La signature négative de la matrice présente une transition de 0 à 1 au nombre d'onde maximal (période minimale).

Finalement, considérons un dernier cas particulier pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$. Comme nous l'avons décrit précédemment pour l'équation de Schrödinger non-linéaire, la limite soliton est un point faible de notre méthode. Il faisait déjà l'objet de deux remarques 2.4 et 2.5 et sera analysé en détail section 6.2. Dans cette section, on présente certains résultats obtenus dans le régime des grandes périodes pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ et on détaille pourquoi, en raison des imprécisions numériques, on ne peut pas apporter de conclusion fiable à partir de ces résultats. L'objectif est d'avoir une vue d'ensemble des raisons qui peuvent nous conduire à confirmer ou infirmer des observations relatives aux grandes périodes.

Cela étant dit, on souhaite pour le moment décrire un moyen d'observer tout de même le comportement des ondes de grande période. Simplement, on va choisir des paramètres particuliers pour lesquels le comportement en grande période que l'on souhaite observer survient pour des ondes de périodes plus faibles.

Observons donc le cas particulier de (gKdV), $\gamma = 4$ avec $c = 50$ et $\lambda = -48$ sur les figures 2.34 et 2.35. On voit de nouveau que les propriétés des ondes de grande période, proches de la limite soliton, sont mal calculées puisqu'on distingue une convergence de la totalité des valeurs propres de \mathbf{D} vers la vitesse c . En particulier, pour des nombres d'onde inférieurs à 0.45, on repère une variation dans la courbure de la courbe représentant la valeur propre minimale sur le graphe de gauche sur la figure 2.34, qui devait rejoindre à la limite la valeur de vitesse sans dispersion $p'(v_s)$ (en pointillés rouges).

En revanche, ce qui apparaît nettement ici est « l'explosion » d'une des valeurs propres associée à l'annulation du déterminant de $\text{Hess}\Theta$ pour le nombre d'onde $k = 0.53$. C'est cette transition de stabilité qui faisait l'objet de difficultés d'observations, décrites section 6.2, dans les cas précédents, mais pour ce jeu de paramètres (λ, c) précis, cette transition a lieu pour des ondes de périodes moins élevées. Puisque l'on observe que la quantité $n(\text{Hess}\Theta) - N$ est impaire, on peut conclure à l'instabilité orbitale des ondes de grande

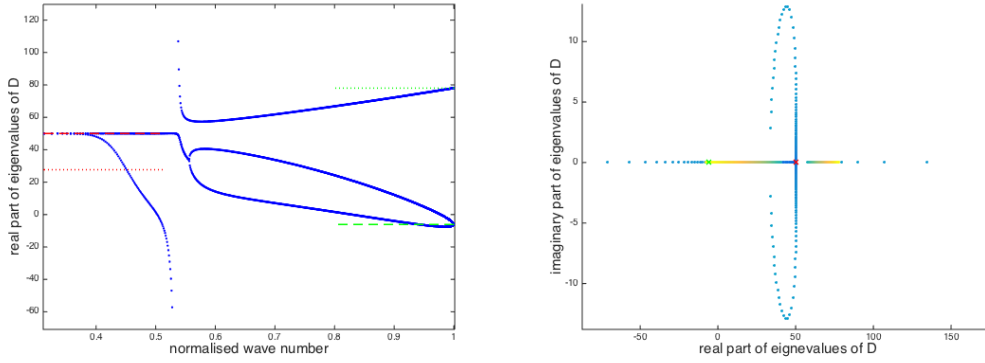


FIGURE 2.34. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 50$, $\lambda = -48$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$, $\Delta\nu = 10^{-3}$.

période pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$, indépendamment du fait que le soliton soit une onde stable.

Ces observations n'entrent pas en contradiction avec les résultats de Gardner [61] qui démontrent l'implication inverse : si l'onde solitaire est instable alors les ondes de grande période le sont également. L'explosion d'une au moins des vitesses caractéristiques du système de Whitham est liée à l'annulation du déterminant de $\text{Hess}\Theta$, impliquant au passage un changement de signature $n(\text{Hess}\Theta)$ et donc un changement de propriété de stabilité orbitale. Plus précisément, au contraire de l'instabilité observée sur la figure 2.33 pour laquelle c'est un changement de signe du premier mineur qui intervient, ici la matrice $\text{Hess}\Theta$ n'est pas inversible, ce qui signifie que le système de Whitham n'est même pas un système d'évolution pour ce nombre d'onde particulier.

En dehors des ces considérations, on peut également noter l'instabilité modulationnelle des ondes de grande période avec la présence de valeurs propres complexes conjuguées pour des nombres d'ondes inférieurs à $k = 0.55$ environ.

En conclusion, on peut mener ces analyses pour n'importe quelle puissance de non-linéarité γ pour l'équation de Korteweg-de Vries généralisée. Ceci nous permet de compléter le tableau des résultats 2.3 affichés plus haut. L'ensemble des résultats est représenté dans un nouveau tableau 2.4. La lecture de ce tableau doit néanmoins se faire avec précaution. Puisque les résultats obtenus lors de chaque étude sont partiels, on ne peut en aucun cas affirmer avec certitude que les informations obtenues représentent la réalité des propriétés de stabilité de la totalité de la famille d'ondes périodiques. On ne peut bien évidemment pas tirer de résultat général à partir d'un agrégat d'exemples mais, ceux-ci fournissent de nombreuses informations.

5.2. $N = 2$: autour du système d'Euler-Korteweg

À l'instar de ceux présentés pour l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS), les résultats pour $N = 2$ sont basés sur l'étude du système d'Euler-Korteweg en coordonnées lagrangiennes (10) que nous rappelons ici

$$\begin{cases} v_t = u_x, \\ u_t + (p(v))_x = -\left(\frac{1}{2}\kappa'(v)v_x^2 + \kappa(v)v_{xx}\right)_x. \end{cases}$$

Il est équivalent, pour les solutions régulières au moins, au système écrit en coordonnées eulériennes (9). Dans ce qui suit, on présente deux cas de non-linéarités p et κ particuliers.

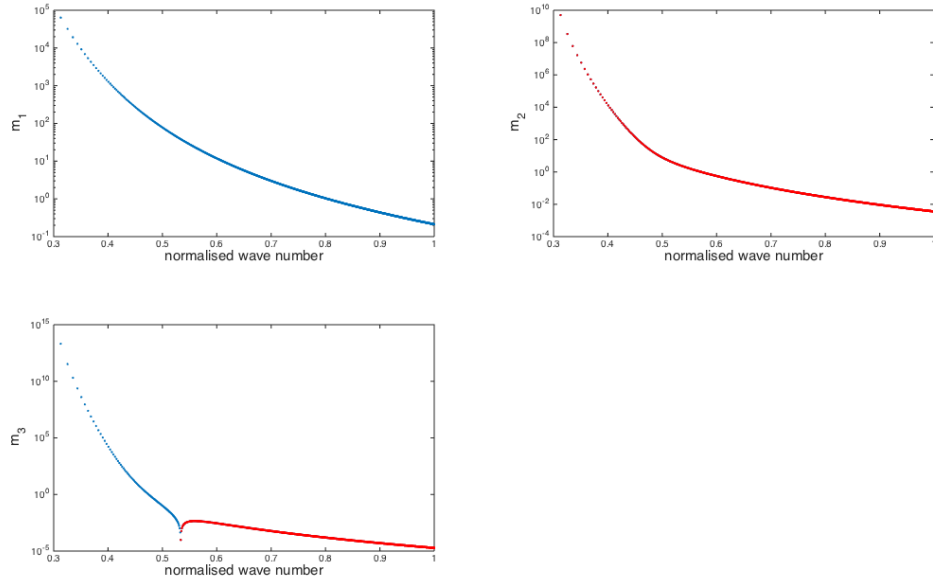


FIGURE 2.35. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = 50$, $\lambda = -48$. La signature négative de la matrice présente une transition de 1 à 2 au nombre d'onde $k = 0.53$.

γ	e	Orbital stability			Modulational stability		
		harmonic limit	–	soliton limit	harmonic limit	–	soliton limit
2	+	✓			✓		
3	+	✓(cn)	✓/x (cn)	x (cn)	x (cn)		
	-	✓(dn)			x (dn)	x/✓(dn)	✓(dn)
	-	✓(sn)			✓(sn)		
4	+	✓	✓/x	x (✓ soliton)	x	✓	x
5	+	✓	✓/x	x	x		
	-	✓			✓		
6	+	✓	✓/x	x	x	✓	x

TABLE 2.4. Résultats de stabilité pour (gKdV), avec en bleu les résultats partiels obtenus uniquement par notre traitement numérique. (✓) signifie stabilité tandis que (x) signifie instabilité. Notez que dans certains cas, la propriété de stabilité peut changer quand la période augmente. Ceci est représenté par (✓/x) ou (x/✓). Les résultats numériques en bleu sont à prendre comme un résumé de l'ensemble des observations effectuées sur des ensembles partiels d'ondes périodiques. Il est donc possible que ces résultats ne traduisent pas de manière exacte le comportement de la totalité de ces ondes.

5.2.1. Non-linéarité de Boussinesq

Dans un premier temps, on considère une loi de pression de type Boussinesq

$$p(v) = e(v - v^2), \quad e = \pm 1.$$

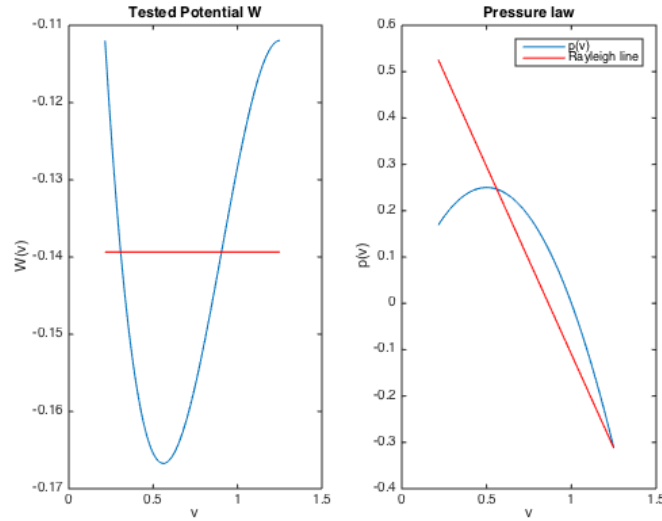


FIGURE 2.36. À gauche, Potentiel $\mathscr{W}(v; \lambda, c)$ pour l'équation (EKL) avec non-linéarité de Boussinesq $p(v) = +(v - v^2)$ en bleu et un niveau d'énergie μ en rouge. À droite, loi $v \mapsto p(v)$ (en bleu) et droite de Rayleigh (en rouge). Images obtenues dans le cas $c = 0.9$ et $\lambda_1 = 0.7$.

Le cas $e = +1$, couplé au choix de capillarité $\kappa(v) = 1$, correspond à la *bonne* équation de Boussinesq étudiée notamment par Bronski, Johnson et Kapitula dans [34], § 4.2.1. On s'attend ici à trouver une période critique de transition de stabilité orbitale, comme annoncé dans [72]. Pour cette non-linéarité, on peut également distinguer au moins deux types de portrait de portrait de phase. Pour $N = 2$, la *droite de Rayleigh* est définie par

$$v \mapsto p(v) - \partial_v \mathscr{W}(v; \lambda, c) = \lambda_1 - c^2 v.$$

On peut ici séparer le cas où les deux intersections entre la courbe $v \mapsto p(v)$ et la droite de Rayleigh se font pour $p'(v) < 0$, voir fig. 2.36 et le cas où l'une des intersections se produit pour $p'(v) > 0$, voir fig. 2.39. Dans ce second cas, le point centre du plan de phase est toujours un état instable du système sans dispersion, qui n'est autre que le p-système

$$\begin{cases} v_t = u_x, \\ u_t + (p(v))_x = 0. \end{cases}$$

Commençons par observer les résultats associés au cas de la figure 2.36, pour lequel le point centre du p-système est un état stable. On remarque sur les figures 2.37 et 2.38 qu'il n'y a aucune instabilité observable dans la gamme de période étudiée. En particulier, les ondes de faible amplitude sont modulationnellement stables.

Passons maintenant à l'étude d'un cas associé à la figure 2.39.

Dans ce cas où le point centre du p-système est un état instable, on observe une instabilité modulationnelle des ondes de faible amplitude indiquée par la présence de valeurs propres complexes conjuguées de la matrice du système de Whitham fig. 2.40. En revanche, on ne distingue toujours aucune instabilité orbitale, voir fig. 2.41.

Enfin, les résultats obtenus pour un dernier cas particulier sont représentés sur la figure 2.42 et 2.43. Sur ces figures, on peut voir non seulement l'instabilité modulationnelle des ondes (la présence d'un spectre complexe pour l'ensemble de la gamme de période), mais aussi une transition de stabilité orbitale, comme prouvée dans [72]. Cette transition se caractérise par le changement de signe du déterminant de la matrice $\text{Hess}\Theta$ à un nombre d'onde de transition $k = 0.66$ environ.

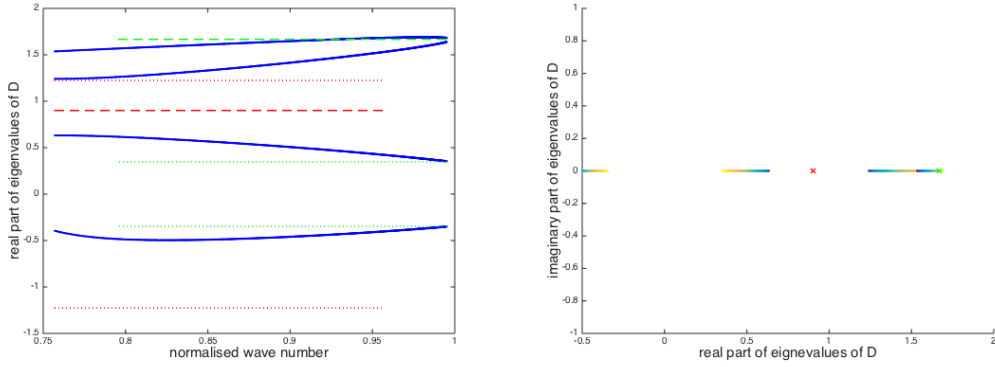


FIGURE 2.37. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation (EKL) avec non-linéarité de Boussinesq $p(v) = +(v - v^2)$ en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 0.9$, $\lambda_1 = 0.7$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$ et $\Delta\nu$ varie linéairement de 10^{-6} côté soliton à 10^{-3} côté harmonique.

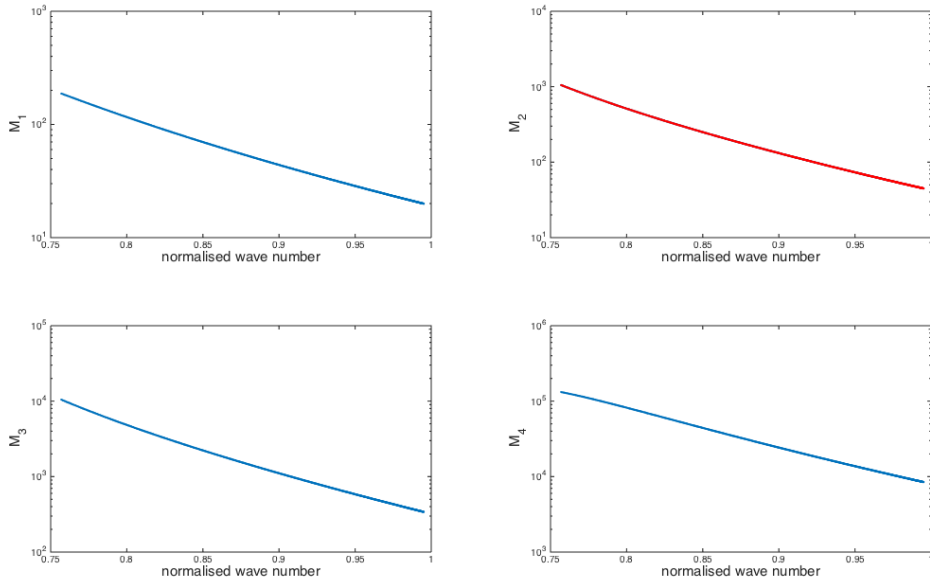


FIGURE 2.38. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation (EKL) avec non-linéarité de Boussinesq $p(v) = +(v - v^2)$ en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = 0.9$, $\lambda_1 = 0.7$. La signature négative de la matrice est $N = 2$.

De la même manière que pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ présentée ci-dessus, cette observation des ondes de grandes périodes ne peut être effectuée de manière suffisamment précise que dans des cas particulier de paramètres (λ, c) , comme celui présenté ici. On ne peut que supposer que ce comportement des ondes de grande période est présent pour d'autres paramètres d'ondes mais notre méthode numérique ne permet pas de l'affirmer avec certitude. On renvoie de nouveau le lecteur à la discussion de la section 6.2 pour plus de détails.

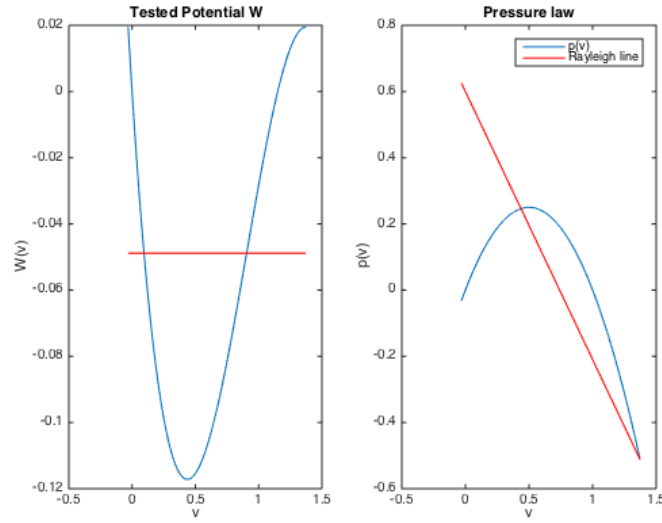


FIGURE 2.39. À gauche, Potentiel $\mathcal{W}(v; \lambda, c)$ pour l'équation (EKL) avec non-linéarité de Boussinesq $p(v) = +(v - v^2)$ en bleu et un niveau d'énergie μ en rouge. À droite, loi $v \mapsto p(v)$ (en bleu) et droite de Rayleigh (en rouge). Images obtenues dans le cas $c = 0.9$ et $\lambda_1 = 0.6$.

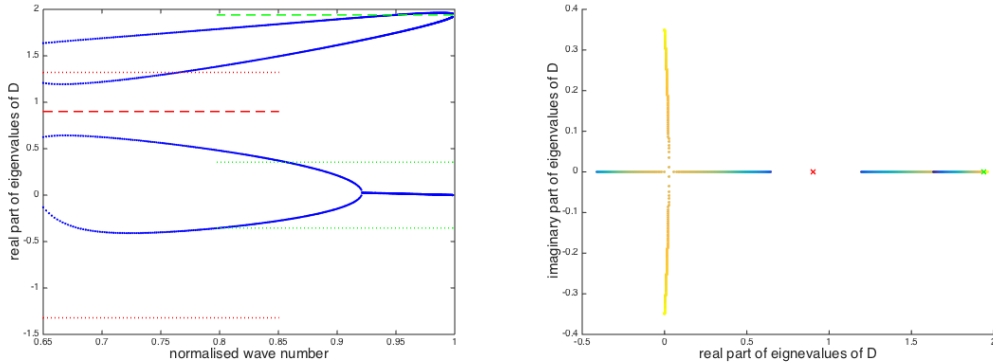


FIGURE 2.40. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation (EKL) avec non-linéarité de Boussinesq $p(v) = +(v - v^2)$ en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 0.9$, $\lambda_1 = 0.6$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$ et $\Delta\nu$ varie linéairement de 10^{-6} côté soliton à 10^{-3} côté harmonique.

5.2.2. Non-linéarité des gaz parfaits

Considérons un dernier cas, celui de la loi de pression des gaz parfaits

$$p(v) = \frac{1}{2v},$$

avec une capillarité constante en coordonnées eulériennes, ou de manière équivalente en coordonnées lagrangiennes $\kappa(v) = \frac{1}{v^5}$. À notre connaissance, on ne dispose d'aucune propriété relative à la stabilité des ondes périodiques de ce système. On observe donc les

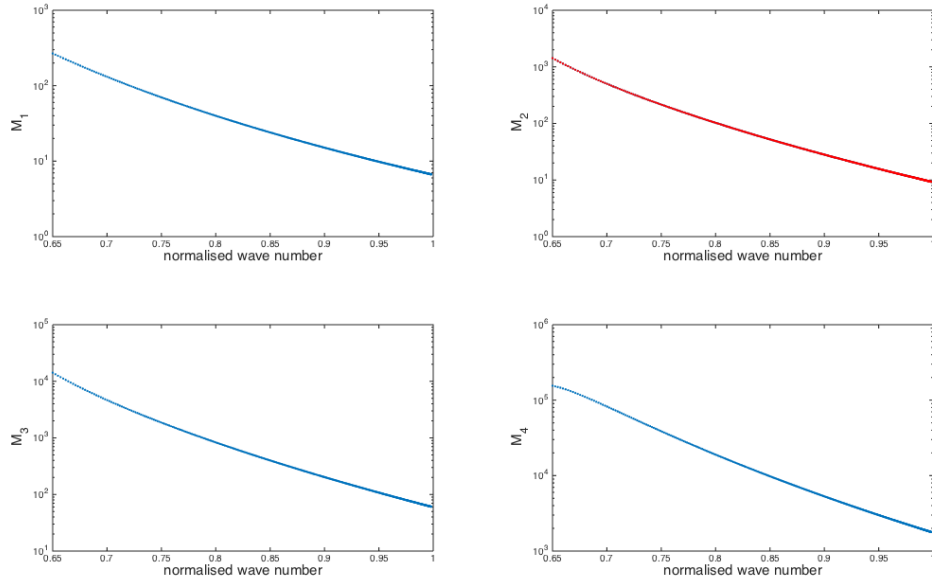


FIGURE 2.41. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation (EKL) avec non-linéarité de Boussinesq $p(v) = +(v - v^2)$ en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = 0.9$, $\lambda_1 = 0.6$. La signature négative de la matrice est $N = 2$.

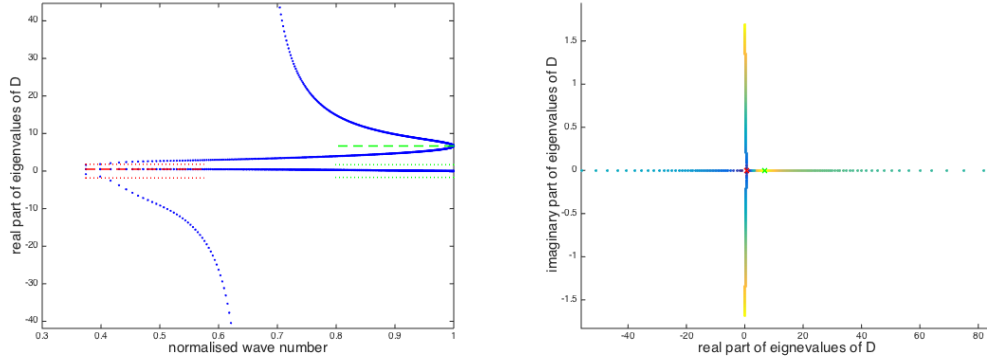


FIGURE 2.42. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation (EKL) avec non-linéarité de Boussinesq $p(v) = +(v - v^2)$ en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 0.5$, $\lambda_1 = -2$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$ et $\Delta\nu$ varie linéairement de 10^{-6} côté soliton à 10^{-3} côté harmonique.

résultats sur les figures 2.44 et 2.45 en toute objectivité. Tout d'abord, on peut noter l'instabilité modulationnelle des ondes dans toute la gamme de période. On observe également un comportement particulier dans la limite soliton. Il semblerait que la signature négative de la matrice $\text{Hess}\Theta$ passe de la valeur 2 à la valeur 3 dans ce régime. Cependant, ces résultats doivent être considérés avec précaution puisqu'ils concernent encore une fois la limite soliton. Dans le cas précis de ce système d'Euler-Korteweg avec loi des gaz parfaits, ces résultats n'ont pas pu être confirmés. Dans un souci d'exhaustivité, on fournit néanmoins

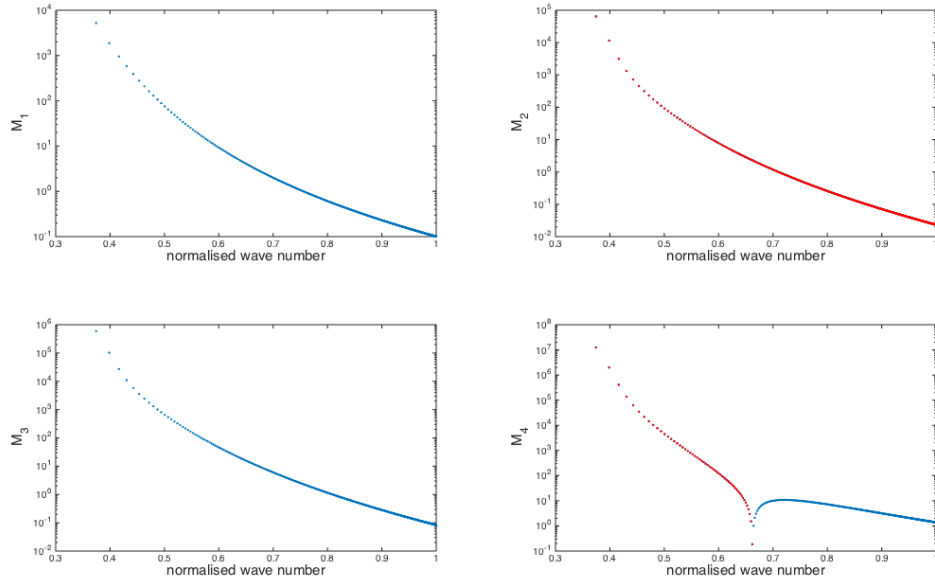


FIGURE 2.43. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation (EKL) avec non-linéarité de Boussinesq $p(v) = +(v - v^2)$ en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = 0.5$, $\lambda_1 = -2$. La signature négative de la matrice présente une transition de la valeur 2 (limite harmonique) à la valeur 3 pour $k > 0.66$.

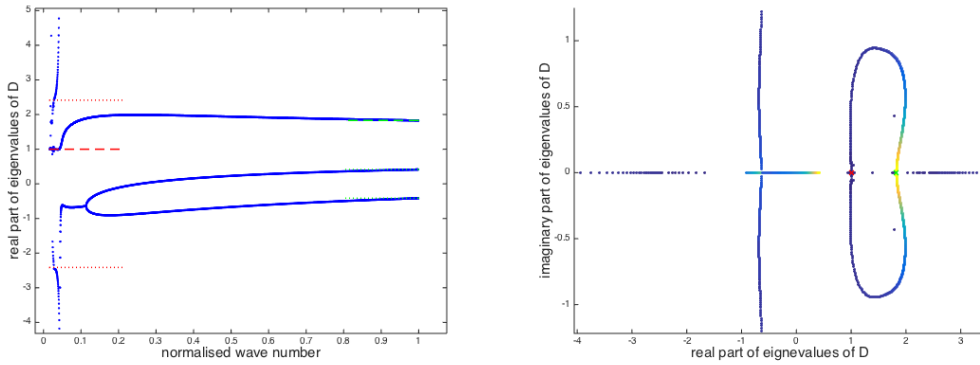


FIGURE 2.44. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation (EKL) avec non-linéarité des gaz parfaits en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 1$, $\lambda_1 = 2$. À droite, spectre représenté dans le plan complexe. $n = 500$ et $\Delta\nu$ varie de 10^{-6} côté soliton à 10^{-4} côté harmonique.

ces résultats qui semblent tout de même indiquer la possibilité d'une instabilité orbitale des ondes de grande période.

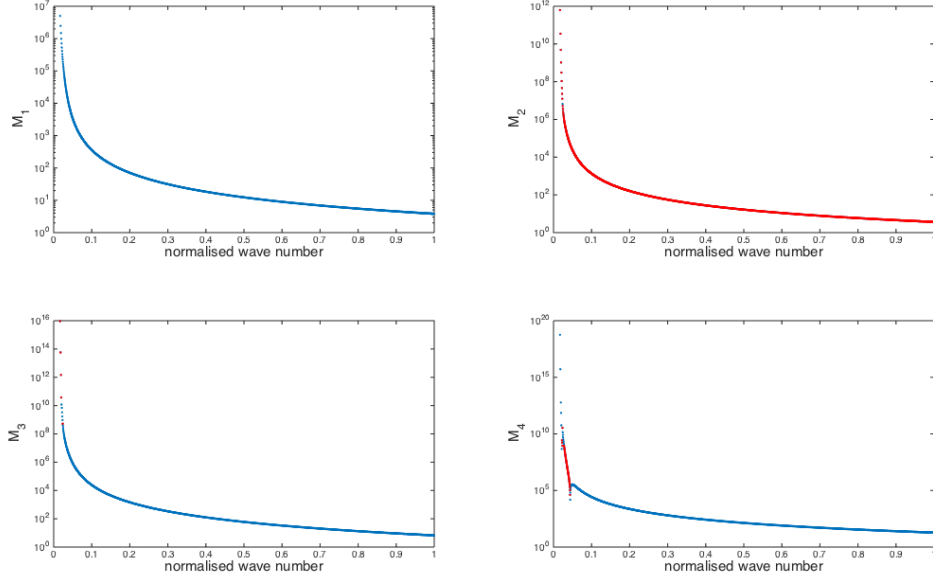


FIGURE 2.45. Mineurs principaux de la matrice $\text{Hess}\Theta$ pour l'équation (EKL) avec non-linéarité des gaz parfaits en fonction du nombre d'onde normalisé dans le cas $c = 1$, $\lambda_1 = 2$. La signature négative de la matrice semble présenter une transition de la valeur 2 à la valeur 3 dans la limite soliton. Cette observation est à considérer avec précautions.

6. À propos des résultats numériques

6.1. Estimations d'erreur

On souhaite ici analyser de manière quantitative les imprécisions numériques relatives au choix des pas de discrétisation Δw et $\Delta \nu$ que l'on a pu observer précédemment. On cherche donc une estimation de l'erreur commise lors du calcul des dérivées secondes de l'intégrale d'action

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = 2 \int_{v_2}^{v_3} \sqrt{2\kappa(v)(\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))} dv.$$

On peut commencer par évaluer numériquement et a posteriori l'erreur de notre méthode d'intégration. On considère $n + 1$ points de discrétisation de telle sorte que $\Delta w = \frac{\pi}{n}$. La méthode des trapèzes est une méthode d'ordre 2, cela signifie que l'on peut écrire l'erreur E_n entre les valeurs de l'intégrale d'action numérique Θ_n et la valeur exacte Θ

$$E_n = \Theta - \Theta_n = C \left(\frac{1}{n} \right)^2,$$

$$E_{2n} = \Theta - \Theta_{2n} = C \left(\frac{1}{2n} \right)^2,$$

où les constantes C sont indépendantes de n et dépendent de bornes sur Θ et de l'intervalle d'intégration. On en déduit que

$$E_n = \frac{\Theta_{2n} - \Theta_n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

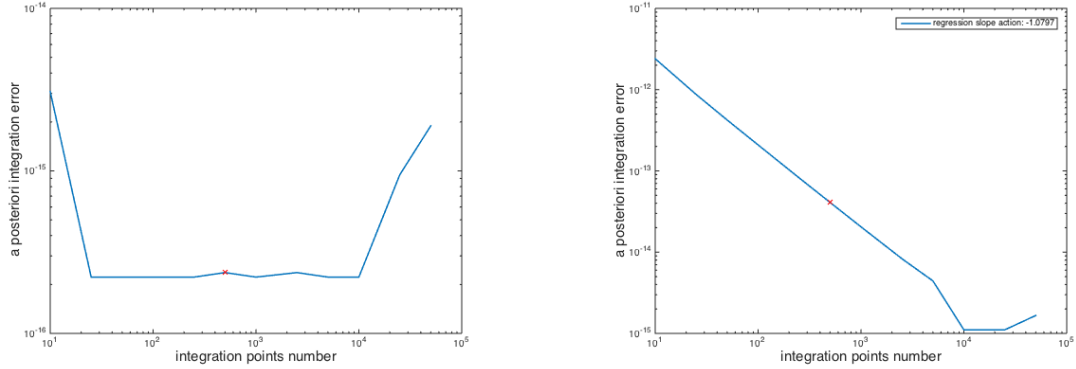


FIGURE 2.46. Erreur relative d'intégration a posteriori pour la méthode des trapèzes en fonction du nombre de points d'intégration n , en échelle logarithmique. À gauche pour l'équation de KdV avec $c = 60$, $\lambda = -60$ et $\mu = -1400$. À droite pour l'équation de KdV généralisée $\gamma = 6$ avec $c = 10$, $\lambda = -5$ et $\mu = 1.09$. Le point rouge correspond au choix particulier opéré lors des analyses présentées ci-dessus.

Un erreur relative peut ainsi être évaluée a posteriori par

$$E_n^{rel} = \frac{E_n}{\Theta_{2n}}.$$

On représente sur la figure 2.46 l'erreur d'intégration a posteriori pour l'action associée à l'équation de KdV et l'équation de KdV généralisée avec $\gamma = 6$. On remarque que pour l'équation de KdV à gauche, la précision machine est atteinte pour un nombre de points d'intégration très faible (à peine une cinquantaine). En revanche, pour l'équation (gKdV-6), on voit nettement un erreur relative d'ordre 1, c'est-à-dire contrôlée uniquement par $\Delta\omega$. Ce phénomène peut être expliqué par l'utilisation de l'extrapolation d'ordre 1 aux extrémités de l'intervalle que l'on effectue lors du calcul de la fonction \mathcal{R} (voir (73)). D'autant plus que, lorsqu'on effectue cette même estimation d'erreur mais sur le calcul où l'on supprime les extrémités de l'intervalle, on perd la périodicité (propriété qui permet d'avoir une convergence exponentielle du calcul intégral d'après [120]) de la fonction intégrée ainsi que l'approximation d'ordre 1 aux bords et on retrouve l'erreur d'ordre 2 associée à la méthode des trapèzes. La raison pour laquelle on n'observe pas cette convergence d'ordre 1 pour l'équation de KdV s'explique uniquement par la présence de « meilleures » constantes dans l'estimation. Le comportement observé sur la figure 2.46 est donc lié à la périodicité et à la régularité aux bords.

D'un point de vue plus analytique, rappelons que l'intégrale d'action est calculée numériquement après un changement de variable donnée par

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = (v_3 - v_2)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\kappa(v(w))\mathcal{R}(v(w), v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c)/2} \cos^2(w) dw,$$

où \mathcal{R} est donnée par (73)

$$\mathcal{R}(v, v_2, v_3; \boldsymbol{\lambda}, c) = \frac{\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c)}{(v_3 - v)(v - v_2)}.$$

La fonction \mathcal{R} ne s'annule pas dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et, dans tous les cas que nous considérons, cette fonction est une fraction rationnelle de la variable v . Puisque κ est également une fraction rationnelle en v dans les différents cas que nous avons considérés, on démontre par compositions que l'intégrale d'action porte sur une fonction analytique

et π -périodique, renommée f afin de réécrire

$$\Theta(\mu, \lambda, c) = \frac{(v_3 - v_2)^2}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(w) dw.$$

L'intégration de fonctions périodiques et analytiques par la méthode des trapèzes présente des propriétés tout à fait particulières. Selon [120, Th. 3.2], l'erreur d'intégration pour $n + 1$ points de discrétisation d'une fonction π -périodique est estimée par

$$(76) \quad |E_n| = |\Theta - \Theta_n| \leq \frac{2\pi C}{e^{2a(n+1)} - 1},$$

où $|f(w)| \leq C$ dans une bande $-a < \text{Im}(w) < a$, où $a > 0$. Cette décroissance exponentielle de l'erreur d'intégration confirme les observations faites fig. 2.46. En effet, la décroissance observée est très rapide, jusqu'à atteindre des valeurs très faibles d'erreur (juste avant que l'approximation d'ordre 1 des extrémités de l'intervalle semble reprendre le dessus dans certains cas).

À l'étape suivante, on calcule les dérivées secondes de l'action Θ . D'un point de vue numérique, on implémente des différences finies d'ordre 2 sur la fonction calculée précédemment Θ_n . Le pas de discrétisation de la dérivation est $\Delta\nu$. Pour n'importe quelle dérivée au coordonnées génériques α, β , on a l'estimation d'erreur suivante

$$(77) \quad \left| \partial_{\alpha,\beta}^2 \Theta - \frac{P_{\alpha,\beta}(\Theta)}{\Delta\nu^2} \right| \leq C \Delta\nu^2,$$

où la constante C ne dépend pas de $\Delta\nu$ mais de bornes uniformes sur Θ et ses dérivées. La fonction $P_{\alpha,\beta}$ est linéaire selon les différentes valeurs de l'action Θ présentes sur le réseau de 3^4 points que l'on utilise. Dans la pratique, on calcule

$$\frac{P_{\alpha,\beta}(\Theta_n)}{\Delta\nu^2}.$$

Si l'on combine les deux estimations d'erreur (76) et (77), on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| \partial_{\alpha,\beta}^2 \Theta - \frac{P_{\alpha,\beta}(\Theta_n)}{\Delta\nu^2} \right| &\leq \left| \partial_{\alpha,\beta}^2 \Theta - \frac{P_{\alpha,\beta}(\Theta)}{\Delta\nu^2} \right| + \frac{1}{\Delta\nu^2} |P_{\alpha,\beta}(\Theta_n) - P_{\alpha,\beta}(\Theta)| \\ &\leq C \Delta\nu^2 + \frac{C}{\Delta\nu^2} \frac{2\pi C}{e^{2a(n+1)} - 1}, \end{aligned}$$

où l'unique notation C représente les différentes constantes du calcul.

Observons plus particulièrement le second terme de l'estimation précédente

$$(78) \quad \frac{C}{\Delta\nu^2} \frac{2\pi}{e^{2a(n+1)} - 1}.$$

Ce terme n'est pas borné quand les deux pas de discrétisation tendent vers zéro. Selon les valeurs des différentes constantes C et a , si le pas de dérivation $\Delta\nu$ est choisi trop petit par rapport au pas d'intégration $\Delta w = \frac{\pi}{n}$. En particulier, puisque l'intégrale d'action Θ tend vers zéro comme $(v_3 - v_2)^2$ dans la limite harmonique [18], on estime que c'est dans cette limite que le terme d'erreur supplémentaire sera le plus prépondérant. D'un point de vue numérique, ce phénomène est effectivement observable plus facilement dans la limite faible amplitude (voir le cas de l'équation de KdV fig. 2.11).

Un choix aurait pu être de ne calculer que des dérivées premières pour calculer la matrice du système de Whitham en utilisant les relations (75). En effet, les dérivées premières de l'action ont également des expressions intégrales et le calcul d'une dérivée première aurait l'avantage de faire apparaître seulement un facteur $1/\Delta\nu$ au lieu de son carré dans (78). La raison pour laquelle ce choix a été écarté est illustrée sur la figure 2.47. Il est évident sur cet exemple que l'erreur commise lors du calcul de la période est plus importante. En tout cas, la différence de précision est suffisamment importante pour que l'on

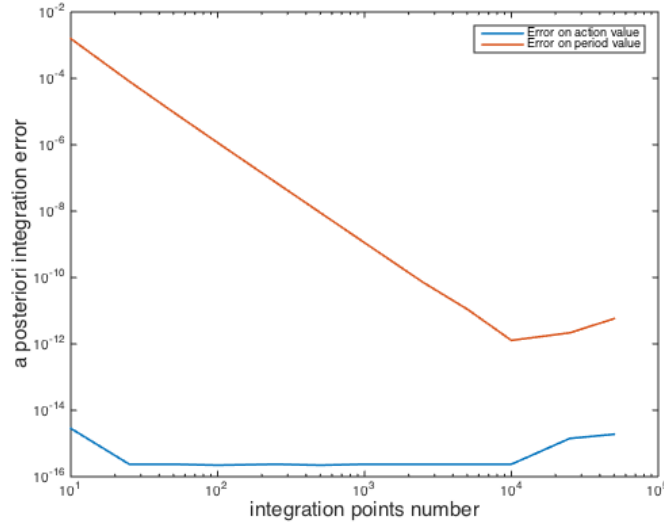


FIGURE 2.47. Erreur relative d'intégration a posteriori pour la méthode des trapèzes en fonction du nombre de points d'intégration n , en échelle logarithmique pour le calcul de l'action Θ (en bleu) et de la période Ξ (en rouge). Image réalisée pour l'équation de KdV avec $c = 60$, $\lambda = -60$ et $\mu = -1400$.

préfère continuer les calculs à partir de l'action elle-même plutôt qu'à partir de ses dérivées premières.

6.2. Discussion sur la précision des résultats

On cherche à quantifier numériquement l'imprecision que l'on obtient à la suite des deux opérations, intégration puis dérivation. Pour cela, on considère de nouveau une erreur relative a posteriori, cette fois sur l'opération de dérivation en considérant par exemple un coefficient (α, β) de la matrice $\text{Hess}\Theta$

$$E_{\Delta\nu}^{\alpha,\beta} = |\Theta_{\alpha,\beta} - \Theta_{\alpha,\beta}^{\Delta\nu}| = C (\Delta\nu)^2 ,$$

$$E_{\Delta\nu/2}^{\alpha,\beta} = |\Theta_{\alpha,\beta} - \Theta_{\alpha,\beta}^{\Delta\nu/2}| = C \left(\frac{\Delta\nu}{2} \right)^2 ,$$

où les constantes C sont indépendantes de $\Delta\nu$. L'erreur relative sur chacune des coordonnées (α, β) de la matrice $\text{Hess}\Theta$ s'écrit alors

$$E_{\Delta\nu, rel}^{\alpha,\beta} = \frac{\Theta_{\alpha,\beta}^{\Delta\nu/2} - \Theta_{\alpha,\beta}^{\Delta\nu}}{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \Theta_{\alpha,\beta}^{\Delta\nu/2}} .$$

Bien sûr, avec cette méthode on ne peut pas évaluer l'erreur d'intégration associée au calcul de l'action Θ mais cette estimation a posteriori peut néanmoins fournir des informations utiles sur la précision du calcul de sa matrice hessienne.

Afin d'évaluer l'effet de l'augmentation du nombre de points d'intégration, on va tracer sur un graphe en trois dimensions cette erreur a posteriori de dérivation $E_{\Delta\nu, rel}^{\alpha,\beta}$ en fonction de $\Delta\nu$ et en fonction du nombre de points n utilisés pour obtenir Θ . On pourra ainsi observer les effets des variations des deux différents pas de discrétisation. Un tel graphe est représenté sur la figure 2.48. Le choix est fait ici de représenter les résultats par des lignes suivant le nombre de points d'intégration afin de faciliter la lecture et la comparaison avec

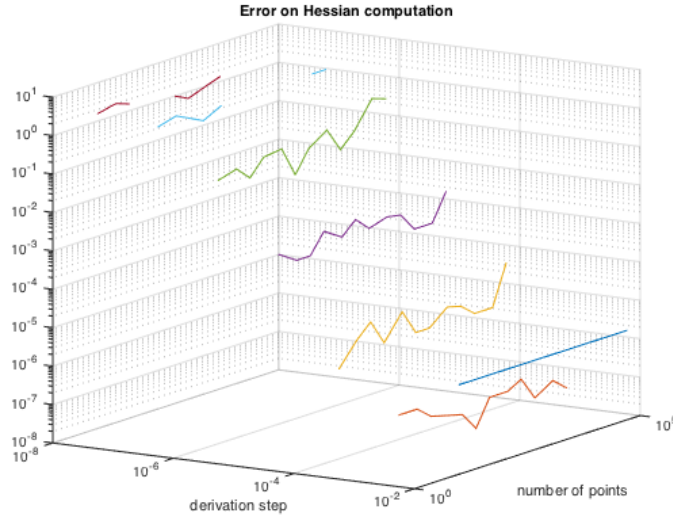


FIGURE 2.48. Erreur relative de dérivation a posteriori en fonction du nombre de points d'intégration n et du pas de dérivation $\Delta\nu$, en échelle logarithmique. Image réalisée pour l'équation de (gKdV), $\gamma = 4$ avec $c = 10$, $\lambda = -3$ et $\mu = -0.3501$ et pour la coordonnée $(\alpha, \beta) = (2, 2)$.

les résultats obtenus sur l'évaluation numérique de l'action et de ses dérivés premières (cf. fig. 2.47).

On distingue un minimum d'erreur pour le pas $\Delta\nu = 10^{-3}$, mais aucun comportement particulier de l'erreur en fonction du nombre de points d'intégration. Ceci s'explique par la précision de celle-ci représentée sur la figure 2.49. L'erreur sur le calcul de l'action est extrêmement faible (de l'ordre de 10^{-15} en moyenne), ce qui signifie qu'à l'échelle de l'erreur commise lors du calcul de dérivée sur la figure 2.48, la variation suivant le nombre de points d'intégration n'apparaît pas.

En revanche on distingue très bien l'augmentation de l'erreur sur la calcul de $\text{Hess}\Theta$ avec la diminution du pas de dérivation, telle qu'elle était pressentie théoriquement grâce à la relation (78). Cette étude a notamment permis d'adapter les pas de dérivation suivant la période des ondes observées. En effet, sur la figure 2.48 sont représentés les erreurs obtenues pour une onde de période fixée, c'est-à-dire à (μ, λ, c) fixés, et nous apprend que le pas adapté pour cette période est 10^{-3} . En observant une onde de période différente (de paramètre μ différent ici), il est possible d'observer un autre optimum comme représenté sur la figure 2.50 dans le cas des ondes de grande période. Dans le cas des ondes de grandes périodes, c'est-à-dire dans le régime limite du soliton, on voit bien ici une diminution du pas de discrétisation optimal pour la dérivation (ici 10^{-6}).

Observons maintenant un autre type d'imprécision numérique que nous avons pu rencontrer, lié à la divergence des dérivées secondes de Θ dans la limite soliton. Reprenons l'exemple de l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ décrit précédemment (cf. fig. 2.25, 2.26) et tentons cette fois d'observer plus en détail le comportement des valeurs propres du système de Whitham et des mineurs principaux de $\text{Hess}\Theta$. La comparaison du spectre est affichée sur la figure 2.51. La première chose à remarquer est que le fait de réduire le pas de dérivation $\Delta\nu$ dans la limite soliton (une réduction contrôlée, afin de conserver une précision suffisante cf. fig. 2.50) permet d'inclure plus d'ondes dans l'étude. Ceci explique l'amplitude plus élevée de la gamme de nombre d'onde affiché sur la courbe de gauche, où le pas de dérivation est plus faible, que sur la courbe de droite de la figure 2.51. Ceci étant dit, le plus frappant reste le changement de comportement des valeurs propres dans cette limite à

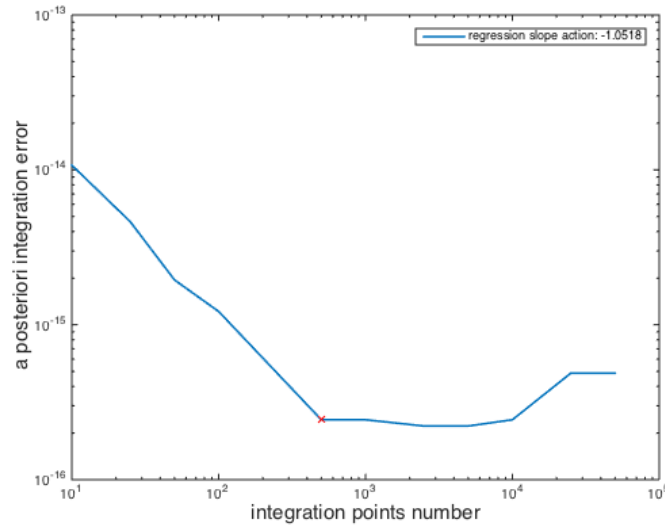


FIGURE 2.49. Erreur relative d'intégration a posteriori pour la méthode des trapèzes en fonction du nombre de points d'intégration n , en échelle logarithmique. Image réalisée pour l'équation de (gKdV), $\gamma = 4$ avec $c = 10$, $\lambda = -3$ et $\mu = -0.3501$. Le point rouge correspond au choix particulier opéré lors des analyses présentées ci-dessus qui représente le choix optimal pour effectuer l'étude de stabilité.

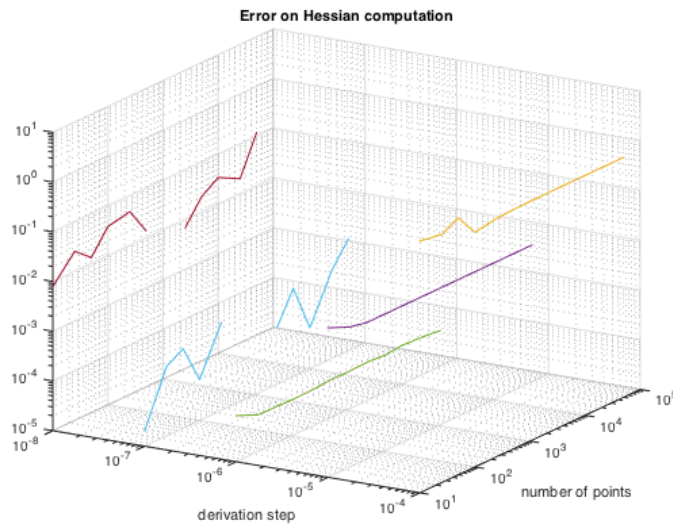


FIGURE 2.50. Erreur relative de dérivation a posteriori en fonction du nombre de points d'intégration n et du pas de dérivation $\Delta\nu$, en échelle logarithmique. Image réalisée pour l'équation de (gKdV), $\gamma = 4$ dans la limite soliton avec $c = 10$, $\lambda = -3$ et $\mu = 0.4525$ et pour la coordonnée $(\alpha, \beta) = (2, 2)$.

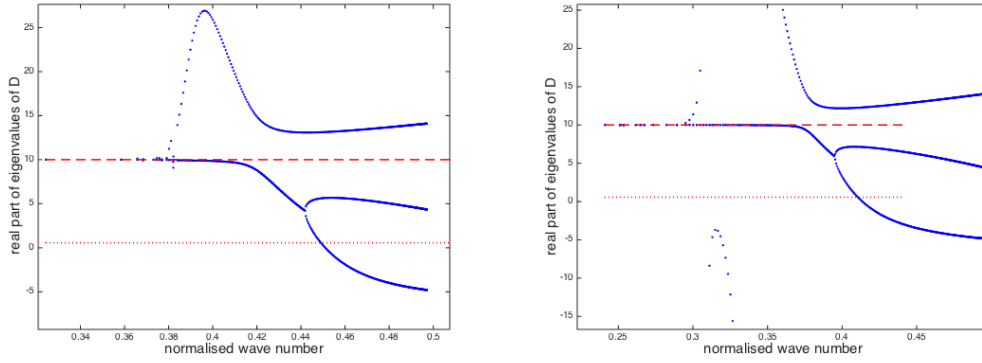


FIGURE 2.51. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation (gKdV), $\gamma = 4$ focalisante en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 10$, $\lambda = -3$ et obtenus pour 500 points d'intégration et un pas de dérivation constant $\Delta\nu = 10^{-3}$. À droite, le même spectre mais cette fois obtenu avec un pas de dérivation variant de $\Delta\nu = 10^{-6}$ dans la limite soliton à $\Delta\nu = 10^{-3}$ pour les plus grandes valeurs de k .

mesure que le pas de dérivation varie. Pour un pas relativement grand, 10^{-3} , on n'observe pas de divergence (à gauche) alors que lorsque le pas diminue (à droite), on observe une (voire deux) périodes critiques pour lesquelles au moins une des valeurs propres diverge. On distingue également une différence dans les échelles de périodes, ou plutôt de nombres d'ondes ici. En particulier, sur la figure de gauche, la bifurcation des deux valeurs propres minimales survient pour un nombre d'onde d'environ 0.44 alors que sur la figure de droite, cette bifurcation a lieu pour un nombre d'onde d'environ 0.40.

Ces différences illustrent parfaitement les difficultés que l'on rencontre dans l'analyse des résultats concernant la limite soliton. D'un côté, on souhaite réduire le pas de discrétisation $\Delta\nu$ afin de réduire la « taille » du réseau de calcul discret et de pouvoir étudier des points plus proches de la frontière du domaine $\Omega \in \mathbb{R}^{N+2}$ contenant les paramètres (μ, λ, c) admissibles. D'un autre côté, l'erreur commise sur le calcul de la matrice hessienne impose une limite à cette diminution. D'autant plus que dans ce régime, les coefficients de cette matrice divergent. Les calculs impliquent alors des grands nombres et l'erreur s'en voit augmentée. On peut le remarquer en comparant différentes échelles d'erreur des figures 2.48 et 2.50, dont la seule différence est de traiter des ondes de périodes différentes. On voit qu'une erreur minimale de l'ordre de 10^{-8} peut être obtenue pour une onde de période relativement faible mais en revanche dans la limite soliton, cette erreur ne peut descendre en dessous de 10^{-5} . Il en va de même pour l'erreur commise sur le calcul de la période, par différences finies d'ordre un cette fois. En résumé, les erreurs numériques commises par notre méthode dans la limite des ondes de grandes périodes – ou limite soliton – sont telles que les résultats obtenus ne permettent en général pas de conclure avec certitude.

Remarque 2.6. C'est pourquoi les résultats de la figure 2.51 ont été écartés précédemment au profit de l'étude d'un autre cas avec des paramètres particuliers qui permettaient d'obtenir un résultat plus probant. Pour le cas présenté sur les figures 2.34 et 2.35, les résultats ont pu être confirmés en constatant la convergence établie du phénomène d'instabilité lors des variations du pas de discrétisation $\Delta\nu$. C'est aussi le cas des résultats concernant le système d'Euler-Korteweg avec non-linéarité de Boussinesq fig. 2.42 et 2.43.

L'ensemble de ces observations permettent néanmoins de justifier les choix effectués du point de vue numérique. En ayant conscience des limites de précision de la méthode mise en œuvre ici, il conviendrait sûrement de la modifier, au moins partiellement, afin d'améliorer l'analyse des ondes de grandes périodes en particulier. Rappelons tout de même que l'un des objectifs premiers de ces travaux était la possibilité d'étudier un ensemble d'ondes périodiques relativement grand en un temps acceptable. Les ondes que nous souhaitons étudier sont représentées par une famille à trois ou quatre paramètres selon le système que l'on choisit d'étudier. Ils représentent d'autant plus de directions à considérer dans les calculs de dérivées. En particulier pour des dérivées d'ordre deux, ces quatre directions établissent le réseau de discrétisation à 3^4 points, et sur chacun de ces points doit être calculée une intégrale numérique. Ce calcul de 91 intégrales permet ainsi d'obtenir la matrice $\text{Hess}\Theta$, qui est au centre de toute notre étude de stabilité, mais uniquement pour une onde particulière, de paramètres fixés. Afin d'analyser les propriétés de toute la famille d'ondes périodiques, il faut ainsi répéter ces opérations pour un ensemble de paramètres. Pour information, les courbes présentées ci-dessus impliquent l'étude d'un nombre d'ondes de l'ordre de 10^3 au minimum pour le tracé, ce qui représente le calcul d'environ 100 000 intégrales. En résumé, le calcul d'intégrale à la base de notre méthode, se devait d'être le moins coûteux en temps possible, tout en conservant une précision suffisante.

6.3. Adaptations de la méthode dans le régime soliton

Cependant, si l'on devait mettre de côté ces considérations de temps de calcul, il existe une autre méthode pour calculer les vitesses caractéristiques du système d'équations modulées de Whitham. Cette méthode consiste à considérer le système de Whitham, non pas sous forme quasi-linéaire mais sous sa forme conservative (24) que l'on rappelle ici

$$\begin{cases} \partial_T k &= -\partial_X(ck), \\ \partial_T \mathbf{M} &= \mathbf{B}\partial_X \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_\alpha} - kD_\varphi \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha,x}} \right) \right\rangle, \\ \partial_T P &= \partial_X \langle \mathcal{I}^0 \rangle. \end{cases}$$

Dans le cas de l'équation (gKdV), $N = 1$, ce système se réécrit

$$\begin{cases} \partial_T k + \partial_X(ck) &= 0, \\ \partial_T \langle \underline{v} \rangle + \partial_X \langle p(\underline{v}) \rangle &= 0, \\ \partial_T \langle \frac{1}{2} \underline{v}^2 \rangle + \partial_X \langle \underline{v} p(\underline{v}) + f(\underline{v}) + \underline{v} \underline{v}'' - \frac{1}{2} (\underline{v}')^2 \rangle &= 0, \end{cases}$$

où \underline{v} est le profil Ξ -périodique de l'onde considérée solution de (64) et $\langle \cdot \rangle$ est le calcul de moyenne sur cette période

$$\langle y \rangle = \frac{1}{\Xi} \int_0^\Xi y(x) dx.$$

On rappelle également que dans le cas de l'équation de (gKdV), la non-linéarité f est définie par

$$f(v) = \pm(\gamma + 1)v^\gamma.$$

On définit alors

$$(79) \quad (k, \mathbf{M}, P) \mapsto \Phi(k, \mathbf{M}, P) = \begin{cases} ck, \\ \langle p(\underline{v}) \rangle, \\ \langle \underline{v} p(\underline{v}) + f(\underline{v}) + \underline{v} \underline{v}'' - \frac{1}{2} (\underline{v}')^2 \rangle. \end{cases}$$

Les vitesses caractéristiques du système de Whitham sont donc les valeurs propres de la matrice jacobienne $\nabla \Phi(k, \mathbf{M}, P)$.

D'un point de vue numérique, toutes les quantités nécessaires au calcul de cette matrice jacobienne, c'est-à-dire la période Ξ ou le nombre d'onde k ainsi que le profil $x \mapsto \underline{v}(x)$

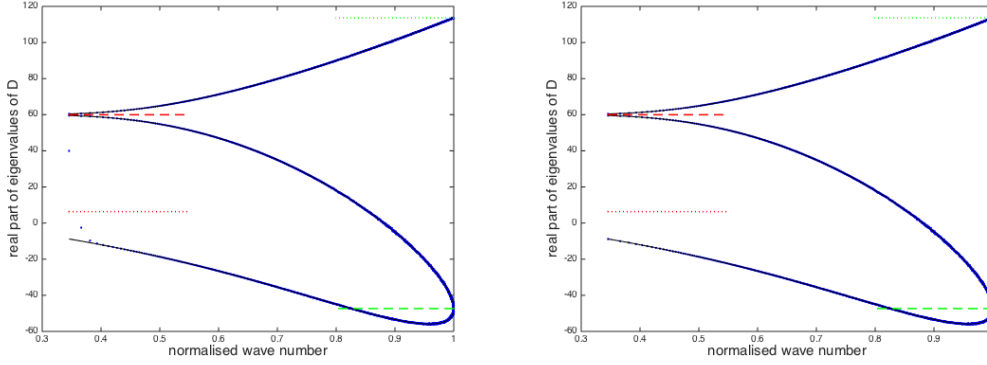


FIGURE 2.52. À gauche, partie réelle de valeurs propres du système de Whitham pour l'équation KdV, en fonction du nombre d'onde normalisé (en bleu) dans le cas $c = 60$, $\lambda = -60$ et obtenus pour 500 points d'intégration et un pas de dérivation constant $\Delta\nu = 10^{-3}$. À droite, le même spectre mais cette fois, les 5 valeurs propres les plus proches de la limite soliton sont recalculés à partir de la matrice $\nabla\Phi(k\mathbf{M}, P)$.

solution de (64), sont définies à partir des paramètres (μ, λ, c) . Ce jeu de paramètres est lié à (k, \mathbf{M}, P) par l'intégrale d'action à travers les relations (75) que l'on réécrit ici sous la forme

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\mu} = \frac{1}{k}, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial c} = kP, \quad \nabla_{\lambda}\Theta = k\mathbf{M}.$$

Ainsi, pour n'importe quel jeu de paramètres (k, \mathbf{M}, P) , on peut calculer les paramètres (μ, λ, c) correspondants par la méthode de Newton. À ce stade, à paramètres (k, \mathbf{M}, P) fixés, on est finalement capable de calculer le profil \underline{v} correspondant. Ce profil est solution de l'équation de profil (64)

$$\frac{1}{2}\kappa(v)v_x^2 + \mathcal{W}(v; \lambda, c) = \mu.$$

La résolution de cette équation par la méthode RK4 détaillée au chapitre 3, section 1.1. Finalement, à partir de ce profil on est capables de calculer les valeurs de la fonction $\Phi(k, \mathbf{M}, P)$ par intégration numérique. Les valeurs moyennes sont calculées par méthode des trapèzes avec un nombre fixe de points. La matrice jacobienne qui nous intéresse est ensuite calculée par différences finies d'ordre 2.

On présente sur la figure 2.52 les résultats obtenus pour l'équation de KdV avec cette méthode. On rappelle que le but est ici d'améliorer le calcul des valeurs propres du système de Whitham dans la limite soliton. La nouvelle méthode décrite dans cette section est beaucoup plus coûteuse en temps de calcul que celle pour laquelle nous avons opté initialement. En effet, le principal défaut ici est que l'on doit calculer un ensemble de profils par un schéma aux différences finies afin de calculer la matrice jacobienne $\nabla\Phi(k, \mathbf{M}, P)$. On peut néanmoins l'appliquer pour une quantité restreinte d'ondes, proches de la limite soliton.

On voit sur la figure 2.52 où les 5 ondes les plus proches de la limite soliton ont été recalculées que la méthode basée sur le système de Whitham sous forme conservative fournit des résultats d'une précision supérieure malgré le fait qu'elle implique toujours l'utilisation de la matrice $\text{Hess}\Theta$. D'un point de vue numérique, la divergence des coefficients de cette matrice vers l'infini pose donc davantage de problèmes pour le calcul de valeurs propres que pour son utilisation dans la méthode de Newton.

Bien que la méthode basée sur la version conservative du système de Whitham fournisse de meilleurs résultats, elle n'est pas la panacée. Son utilisation reste relativement

complexe en terme de choix des pas de discrétisation utilisés pour la résolution. Les variations selon les paramètres (k, \mathbf{M}, P) que l'on doit effectuer pour le calcul de la jacobienne $\nabla\Phi(k, \mathbf{M}, P)$ sont beaucoup plus limités que les variations utilisées pour le calcul de $\text{Hess}\Theta$. Plus précisément, les pas de dérivations sont toujours limités par la précision du calcul d'intégrale comme on l'a décrit ci-dessus, mais cette fois la difficulté est de choisir ces pas suffisamment petit pour que le jeu de paramètre $(k + dk, \mathbf{M} + d\mathbf{M}, P + dP)$ par exemple soit toujours admissible, c'est à dire associée à une onde périodique solution de (65). Finalement, cette nouvelle méthode permet plutôt d'affiner les résultats obtenus dans le régime soliton sans pour autant nous permettre de l'explorer plus en détail.

Chapitre 3

Manifestations des ondes périodiques : perturbations et chocs dispersifs

1. Retour sur le système d'ÉDP dispersive

Après avoir étudié les propriétés de stabilité d'ondes solutions d'ÉDP dispersives par une méthode que l'on pourrait qualifier d'*indirecte*, on souhaite maintenant observer les réels effets d'une perturbation sur une onde périodique solution du système (2)

$$\partial_t \mathbf{U} = \mathcal{J}(\delta \mathcal{H}[\mathbf{U}]) .$$

Devant la nature oscillante des problèmes que l'on souhaite étudier, on rejette les méthode spectrales généralement utilisée pour ce type d'équation pour se concentrer sur un schéma aux différences finies. Les méthodes spectrales comme celle décrites par Grava & Klein [65] sont plus adaptés à l'étude de solutions localisées telles que les solitons.

On cherche dans un premier temps à connaître le profil des solutions périodiques d'un système d'ÉDP dispersive donné. Pour cela, il faut résoudre l'équation de profil (13)

$$\frac{1}{2} \kappa(v) v_x^2 + \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c) = \mu ,$$

en tirant parti des quelques données que l'on a obtenues précédemment. Dans un second temps, on résout le système d'ÉDP dispersive lui même par différences finies. Ceci permettra d'observer l'évolution temporelle d'une perturbation de ces ondes périodiques. Connaissant au préalable les propriétés de stabilité des ondes que l'on étudie, on pourra analyser les effets de plusieurs types de perturbations (localisée, co-périodique...).

1.1. Résolution des équations de profil

Commençons par travailler sur le profil d'une onde. Rappelons que pour un système d'ÉDP dispersive donné et un jeu de paramètre $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \mathbb{R}^{N+2}$ donné, un profil périodique est solution de (65) que l'on recopie ici

$$\frac{1}{2} \kappa(v) v_x^2 + \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c) = \mu .$$

Cette équation est une équation différentielle ordinaire pour l'inconnue v . Ajoutons que dans le cas $N = 2$, la seconde inconnue u est liée à v par une relation qui s'écrit $u(v; \boldsymbol{\lambda}, c) = -(\lambda_2 + cv)$ dans le cas des coordonnées lagrangiennes de masse. De plus, grace au travail effectué au préalable sur chaque onde périodique, on dispose de nombreuses information supplémentaires utiles, notamment les valeurs des extrema du profil v_2 et v_3 ainsi que la période de l'onde Ξ . Ces quantités on été obtenues lors de la recherche de données d'une onde à partir de ces paramètres (voir chapitre 2, section 3) et par l'étude des dérivées de l'intégrale d'action $\Xi = \Theta_\mu$.

Afin de résoudre l'équation de profil, on travaille dans le *plan de phase* avec les inconnues $(v_1, v_2) = (v, \dot{v})$. Dans ces coordonnées, l'équation (65) se réécrit

$$(80) \quad \begin{cases} v_1' &= v_2 \\ v_2' &= -\frac{1}{\kappa(v)} \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial v} v_2 + \frac{1}{2} \frac{d\kappa}{dv} v_1^2 \right) \end{cases}$$

Remarque 3.1. En pratique, le fait de connaître au préalable les extrema et périodes des profils périodiques permet de résoudre directement l'équation de profil (80) par différences finies. Sans ces données supplémentaires, il serait nécessaire d'employer une méthode de tir.

On résout l'équation différentielle (80) par une méthode de Runge et Kutta 4 sur une période. Encore une fois, on utilise les résultats théoriques sur les équation de (KdV) et (NLS) pour établir la validité des résultats obtenus lors de la résolution. Les résultats de cette comparaison sont présentés fig. 3.1 et fig. 3.2. Dans le cas de (KdV), on voit que

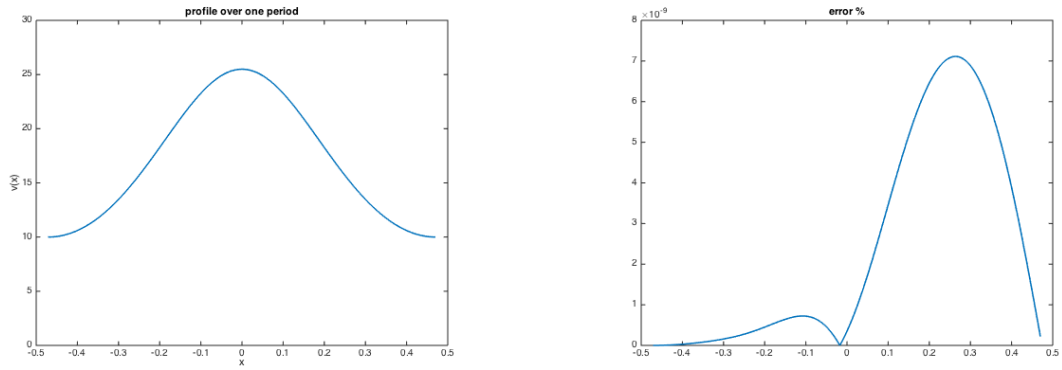


FIGURE 3.1. À gauche, profil d'onde périodique sur une période pour l'équation de (KdV) avec $c = 60$, $\lambda = -60$ et $\mu = -1400$. En bleu la solution numérique, en noir la solution théorique. À droite, l'erreur relative en pourcentage entre ces deux solutions. Dans ce cas, $\Xi = 0.9421$ et $dx = 10^{-3}$.

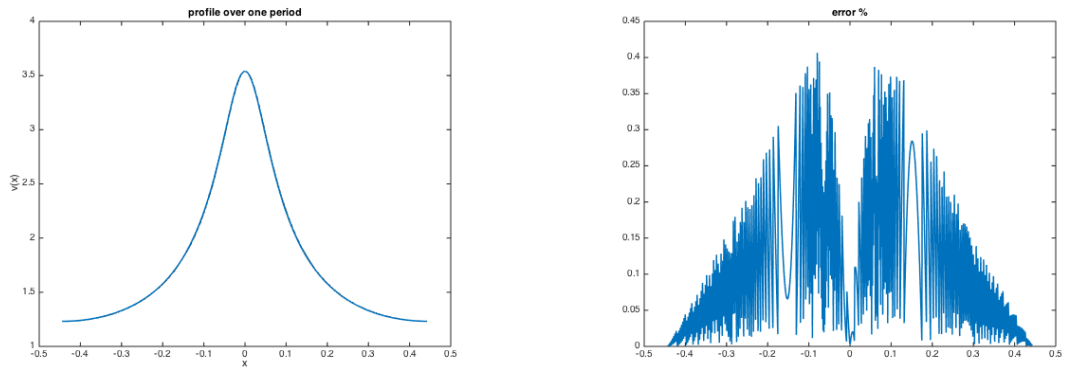


FIGURE 3.2. À gauche, profil d'onde périodique sur une période pour l'équation de (NLS) avec $c = -1$, $\lambda_1 = 2.5$ et $\mu = -2.7267$. En bleu la solution numérique, en noir la solution théorique. À droite, l'erreur relative en pourcentage entre ces deux solutions. Dans ce cas, $\Xi = 0.8888$ et $dx = 10^{-3}$.

pour un pas de discrétisation relativement grand ($dx = 10^{-3}$), l'erreur obtenue sur le calcul du profil est tout à fait satisfaisante, de l'ordre de 10^{-9} %. Pour (NLS), l'erreur est plus importante mais reste relativement faible, 0.5 %. Les choix $c = -1$ et $\lambda_2 = 0$ pour (NLS) impliquent $v = u$, ceci explique que l'on n'affiche que la première inconnue du système ici.

Dans la suite, on utilisera ces profils périodiques pour créer une donnée initiale pour la résolution du système d'ÉDP dispersive. Cette donnée initiale sera une périodisation du profil solution de (80) sur une période, à laquelle on ajoutera ou non une perturbation.

2. Discrétisation du système d'ÉDP par différences finies

Passons maintenant à l'étude du système d'ÉDP dispersive de départ (??). En pratique, on continue à considérer les cas $N = 1$ ou 2 , pour lesquels sont donnés les non-linéarités

$p(v)$ et $\kappa(v)$. Plus particulièrement, dans le cas $N = 1$ on étudie l'équation

$$(81) \quad v_t + (p(v))_x = - \left(\frac{1}{2} \kappa'(v) v_x^2 + \kappa(v) v_{xx} \right)_x ,$$

et dans le cas $N = 2$

$$(82) \quad \begin{cases} v_t = u_x \\ u_t + (p(v))_x = - \left(\frac{1}{2} \kappa'(v) v_x^2 + \kappa(v) v_{xx} \right)_x . \end{cases}$$

Pour plus de clarté, on va travailler sur le cas $N = 1$, le cas $N = 2$ s'en déduira facilement. On commencera également par travailler sur le cas $\kappa = 1$ avant de généraliser notre schéma numérique au cas κ variable.

2.1. Schéma saute-mouton d'ordre 2 pour (gKdV)

Concentrons-nous donc sur le cas $N = 1$, $\kappa = 1$. L'équation (81) correspond alors à l'équation de KdV généralisée (gKdV). Afin d'écrire un schéma pour cette équation, on commence par considérer le cas particulier et très bien documenté de (KdV), c'est-à-dire le cas $p(v) = 3v^2$. Les schémas aux différences finies adaptés à l'étude de cette équation sont relativement nombreux comme le présentaient déjà Taha & Ablowitz dans [117] au début des années 80. Bien évidemment, les schémas qu'ils présentent ont tous leurs avantages et inconvénients, généralement en terme de précision et de coût de calcul. On se concentre néanmoins sur leur premier schéma, le plus simple a priori, développé par Zabusky & Kruskal [124] en 1965 qui est décrit [117, § 2.1]. Une généralisation simple de ce schéma pour (gKdV) s'écrit

$$(83) \quad \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} - f''(v_j^n) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = - \frac{v_{j+2}^n - 2v_{j+1}^n + 2v_{j-1}^n - v_{j-2}^n}{2\Delta x^3} .$$

Le schéma (83) correspond à un schéma de *saute-mouton* explicite d'ordre 2 en temps en espace dans lequel l'indice n correspond au pas d'évolution tandis que l'indice j correspond au pas d'espace. Il présente très certainement l'avantage de pouvoir être étendu facilement aux nouvelles non-linéarités que l'on souhaite étudier ainsi qu'au cas du système $N = 2$.

Remarque 3.2. Le schéma initial de Zabusky & Kruskal [124] utilisait une discrétisation particulière du terme non-linéaire de (KdV) à travers une moyenne sur le réseau de trois points utilisé

$$uu_x \approx \frac{1}{3} (u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} ,$$

ce qui a pour effet a priori d'améliorer la précision du schéma. Considérant son effet limité constaté numériquement pour le schéma (83), on fait le choix de ne pas utiliser cette *variante* afin de privilégier la clarté du propos.

Le schéma (83) étant un schéma à deux pas, la première itération nécessite un calcul préalable. On utilisera alors le schéma explicite suivant

$$(84) \quad \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + p'(v_j^n) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = - \frac{v_{j+2}^n - 2v_{j+1}^n + 2v_{j-1}^n - v_{j-2}^n}{2\Delta x^3} .$$

Remarque 3.3. Le schéma précédent (84) n'est pas conservatif comme le schéma original de Zabusky & Kruskal. Ce schéma était destiné à la simulation de données initiales régulières afin d'observer la formation de trains de solitons. Dans le cadre de la simulation de chocs dispersifs, la forme non-conservative du schéma devient un réel problème car il ne permet pas de sélectionner les discontinuités admissibles au sens de la théorie des ÉDP hyperboliques (voir par exemple Bouchut [28, § 2.1 et 2.2]). Bien que la structure des discontinuités que l'on souhaite simuler soit dans une certaine mesure régularisée par la

dispersion, on travaillera à partir d'une version conservative de ce schéma pour l'étude des chocs dispersifs.

On souhaite maintenant étudier la condition de stabilité linéaire du schéma (83) et ainsi étendre la relation de [117, éq. (2.2)] à des non-linéarités plus générales. Pour cela, on adapte les techniques de démonstration décrite par Strikwerda [116] et celles de l'ouvrage de Enns [54, ex. 4-8] afin d'établir l'estimation suivante

Proposition 3.4. *La condition de stabilité en norme L^2 du schéma (83) s'écrit*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left| -\frac{p'_*}{3} + \frac{1}{\Delta x^2} \right| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

où p'_* est la valeur minimale de la dérivée $p'(v)$.

Démonstration.

D'après [116, sec. 2.3], la procédure concernant les schémas aux différences finies non-linéaires consiste à « geler » les coefficients afin de travailler avec un schéma linéaire à coefficients constants. Ces coefficients gelés représentent l'ensemble des valeurs atteintes par les coefficients sur le domaine de calcul. Si chacun des schéma à coefficients gelés est stable alors le schéma non-linéaire le sera également. On considère le schéma linéaire suivant où v est une constante et qui représente donc l'ensemble des schéma à coefficients gelés associés au schéma non-linéaire (83)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + p'(v) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = -\frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2\Delta x^3}.$$

Par une transformation de Fourier discrète en espace, on obtient la relation pour $\xi \in [-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x]$

$$\hat{u}_{n+1}(\xi) - \hat{u}_{n-1}(\xi) = -\hat{u}_n(\xi) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[p'(v) (e^{il\Delta x\xi} - e^{-il\Delta x\xi}) + \frac{1}{\Delta x^2} (e^{2il\Delta x\xi} - 2e^{il\Delta x\xi} + 2e^{-il\Delta x\xi} - e^{-2il\Delta x\xi}) \right],$$

ou encore de manière équivalente

$$(85) \quad \hat{u}_{n+1}(\xi) - \hat{u}_{n-1}(\xi) = -\hat{u}_n(\xi) \left[2i \frac{\Delta t}{\Delta x} (p'(v) \sin(l\Delta x\xi) - \frac{1}{\Delta x^2} (2 \sin(l\Delta x\xi) - \sin(2l\Delta x\xi))) \right].$$

Pour résoudre la relation de récurrence à deux pas (85), on travaille à partir de l'équation caractéristique associée dont les solutions s'écrivent

$$r_{1,2} = iR \pm (1 - R^2)^{1/2},$$

où

$$R = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(p'(\tilde{v}) \sin(l\Delta x) - \frac{1}{\Delta x^2} (2 \sin(l\Delta x) - \sin(2l\Delta x)) \right).$$

Les solutions de (85) s'écrivent donc sous la forme

$$\hat{u}_n(\xi) = a(\xi)r_1^n + b(\xi)r_2^n$$

où les fonctions a et b sont déterminés par les conditions initiales. Comme dans [116, sec. 4.1], on établit une condition de stabilité analogue à celle de l'analyse de stabilité de Von Neumann pour les schémas à un pas. Une condition suffisante de stabilité s'écrit $|r_i| \leq 1$ pour $i = 1, 2$ et elle sera satisfaite si $R^2 \leq 1$, c'est-à-dire

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left| p'(v) \sin(l\Delta x\xi) - \frac{1}{\Delta x^2} (2 \sin(l\Delta x\xi) - \sin(2l\Delta x\xi)) \right| \leq 1.$$

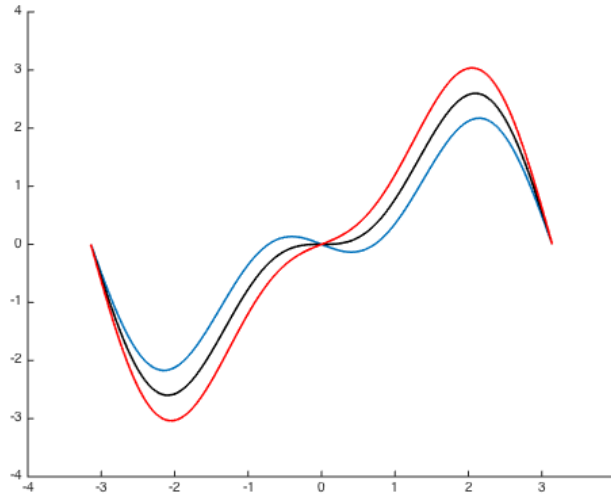


FIGURE 3.3. Fonction $f_\varepsilon(\theta)$ pour $\varepsilon > 0$ en bleu, $\varepsilon = 0$ en noir et $\varepsilon < 0$ en rouge.

On étudie la fonction suivante pour $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$f_\varepsilon(\theta) = 2 \sin(\theta) - \sin(2\theta) - \varepsilon \sin(\theta),$$

afin d'en établir les valeurs extrémales dans le cas $\varepsilon \rightarrow 0$. Après dérivation selon la variable θ , la fonction dérivée $f'_\varepsilon(\theta)$ s'exprime comme un polynôme de degré 2 de la variable $X = \cos(\theta)$. Les extrema de f_ε sont donc liés aux racines de

$$2X^2 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)X - 1 = 0.$$

Un développement limité en $\varepsilon \rightarrow 0$ permet d'écrire les deux racines de cette équation

$$X_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{12} + o(\varepsilon), \quad X_2 = 1 - \frac{\varepsilon}{6} + o(\varepsilon).$$

Dans le cas où $\varepsilon < 0$, on trouve $X_2 > 1$ et seule X_1 est admissible. Dans le cas $\varepsilon > 0$, les deux racines sont admissibles. La valeur maximale de $|f_\varepsilon|$ est atteinte pour l'un des angles associés à la racine X_1 qui est proche $\theta = \frac{2\pi}{3}$ comme le montre la figure. La condition de stabilité pour $l \Delta x \xi = \frac{2\pi}{3}$ s'écrit

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left| \frac{1}{\Delta x^2} \frac{2\sqrt{3}}{2} - p'(v) \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \leq 1.$$

Finalement, pour des non-linéarités p' qui vérifient pour tout v , $p'(v) \ll \frac{1}{\Delta x^2}$, la valeur de constante v pour laquelle cette condition est la plus difficile à vérifier est celle correspondant au minimum de p' , peu importe son signe. En notant cette valeur p'_* , on obtient la condition énoncée. □

Cette condition de stabilité force à opter pour un pas de temps très court ce qui se traduit par de longs temps de calcul. Dans la pratique, on choisit très souvent le pas d'espace Δx le plus grand possible, tout en conservant une précision raisonnable, afin d'avoir un maximum de liberté sur le pas d'évolution Δt .

2.2. Extension au cas κ variable

On souhaite maintenant introduire la non-linéarité supplémentaire $\kappa(v) \neq 1$. D'un point de vue pratique, seul le membre de droite du schéma (83) sera transformé. On discrétise dans un premier temps la quantité $-\left(\frac{1}{2}\kappa'(v)v_x^2 + \kappa(v)v_{xx}\right)$ de la manière suivante

$$(86) \quad T_j^n = -\frac{1}{2}\kappa'(v_j^n) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)^2 - \kappa(v_j^n) \left(\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2}\right).$$

Puis on remplace le membre de droite du schéma (83) pour obtenir le schéma suivant

$$(87) \quad \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} + p'(v_j^n) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) = \frac{\varepsilon}{2\Delta x} (T_{j+1}^n - T_{j-1}^n).$$

Dans le cas $\kappa = 1$, le schéma précédent (87) se réduit au schéma (83). De plus, on a ajouté ici un facteur ε aux termes dispersifs, simplement pour être en mesure de régler l'intensité de leurs effets. En pratique, ce schéma a un comportement tout à fait similaire à celui du cas $\kappa = 1$. Bien-sûr, la condition de stabilité linéaire du schéma (87) est plus complexe que celle présentée à la proposition 3.4. Elle doit notamment faire intervenir les valeurs maximale des fonction κ et κ' . L'expression de cette nouvelle condition de stabilité étant plus complexe et donc moins exploitable, on continuera à utiliser la condition de stabilité du schéma (83) en pratique.

On peut maintenant étendre de manière très simple le schéma (87) au cas $N = 2$. On utilise toujours des différences finies d'ordre deux pour la dérivation spatiale et un schéma de saute-mouton en temps. On obtient le schéma suivant

$$(88) \quad \begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + p'(v_j^n) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) = \frac{\varepsilon}{2\Delta x} (T_{j+1}^n - T_{j-1}^n). \end{cases}$$

Bien évidemment, il nous reste à définir des conditions aux limites afin de compléter notre condition initiale et notre schéma. Les conditions aux limites périodiques semblent naturelles pour notre problème. Néanmoins, on peut également souhaiter étudier des solutions de type chocs, comme ce sera le cas ci-après. Dans ce cas, les conditions aux limites périodiques ne seront plus nécessairement adaptées.

Remarque 3.5. Le schéma (88) n'est pas non plus sous forme conservative. Pour étudier les chocs dispersifs, il sera nécessaire de travailler avec une version conservative dont les propriétés sont décrites aux sections 4, section 5.

Remarque 3.6. D'un point de vue pratique, on ne changera pas les conditions aux limites dans le code numérique. On choisit plutôt de définir les conditions initiales de manière à ce qu'elles satisfassent ces conditions, en général en fixant une valeur constante aux deux imites et en localisant la *zone d'intérêt* (une marche dans le cas du choc par exemple) au centre de l'intervalle. Bien sûr, si l'on souhaite étudier l'évolution d'une solution sans propriétés de périodicité, on s'attend à ce que la résolution soit qualitativement correcte uniquement tant que le déplacement de cette zone d'interêt n'atteint pas les extrémités de l'intervalle. Cette méthode permet donc de travailler avec des conditions périodiques sur des problèmes qui ne le sont pas, au prix de limiter le temps d'observation et/ou d'augmenter la taille de l'intervalle spatial parce que l'on observe des phénomènes qui se propagent essentiellement à vitesse finie.

3. Comportement des ondes périodiques perturbées

Concentrons-nous pour le moment sur l'étude de solution périodiques perturbées. Rappelons que selon le système d'ÉDP dispersive que l'on considère, on dispose de différentes solutions périodiques suivant leurs paramètres $(\mu, \lambda, c) \in \mathbb{R}^{N+2}$ obtenues à partir de leur profil solution de (65). On connaît également les propriétés de stabilité de chacune de ces solutions suite à l'étude que l'on a effectuée précédemment. On va maintenant perturber ces solutions périodiques initialement et observer l'évolution de la fonction créée afin d'observer les manifestations de ces perturbations suivant les propriétés de stabilité des ondes. Dans la suite, on considèrera deux types de perturbations. Le premier est localisé : une gaussienne dont on fera varier l'amplitude A et la variance σ . Pour une donnée initiale périodique v_0 , on travaillera alors avec la donnée initiale perturbée v_0^p définie par

$$(89) \quad v_0^p(x) = v_0(x) + A \exp\left(\frac{-(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right).$$

Le second type de perturbation sera co-périodique et consistera simplement à appliquer la perturbation précédente à chaque période de l'onde. En réalité, puisque l'on résout toujours numériquement avec des conditions périodiques, la première méthode ne donne réellement accès qu'à des perturbations *sous-harmoniques*.

3.1. Perturbation localisée

Une première étude concerne la vitesse de propagation des perturbations. En effet, d'après [78] dans le cas d'équations de conservation dissipatives, on peut faire le lien entre la vitesse de déplacement d'une perturbation localisée initialement et les vitesses caractéristiques du système modulé de Whitham associées à l'onde périodique support de cette perturbation. Ces vitesses sont au nombre de $N + 2$. Une perturbation localisée aura donc tendance à se *disloquer* lors de l'évolution temporelle et avoir un effet à $N + 2$ endroits au cours du temps. Les vitesses de déplacement de ces perturbations devrait être données par les valeurs propre du système de Whitham associée à l'onde périodique $(\mu, \lambda, c) \in \mathbb{R}^{N+2}$ de départ qui ont été obtenues au chapitre 2, section 4.

Afin d'analyser plus facilement certains résultats, il peut également être utile de travailler avec la transformée de Fourier associée à l'onde que l'on observe. Sans perturbation, cette onde est périodique et son spectre localisé est très facilement reconnaissable. En revanche, l'ajout de la perturbation peut entraîner l'apparition de fréquences parasites qui seront très rapidement identifiées.

L'effet du passage d'une perturbation localisée sur une onde stable se traduit a priori par une variation de période et d'amplitude. On pourra donc observer la position des extrema de l'onde au cours du temps. La position relative des extrema reste constante tant que l'onde périodique n'est pas perturbée, et c'est seulement lors du passage d'une perturbation que l'on devrait observer un *déphasage* des extrema.

Commençons par étudier le cas de l'équation de Korteweg-de Vries. On sait que l'évolution d'une perturbation localisée appliquée à une solution de référence constante fait apparaître un à plusieurs solitons ainsi qu'une « traînée » d'oscillations dont la taille décroît algébriquement en fonction du temps. Ce comportement a été mis en évidence par Zabusky et Kruskal [124] et prouvé ensuite dans [68]. L'évolution d'une perturbation localisée autour de solutions périodiques ou quasi-périodiques se passe légèrement différemment. Mikikits-Leitner [97] prouve qu'il apparaît toujours un ou plusieurs solitons ainsi qu'une ou plusieurs zones oscillatoires décroissant algébriquement, et que la convergence ne se fait pas vers la solution périodique de référence mais vers une solution dite « modulée ». On cherche dans un premier temps à observer numériquement ce comportement avant de travailler sur d'autres équations comme (gKdV) ou (EK). On n'utilise pas ici de solution analytique de l'équation de KdV mais on construit l'onde support de notre perturbation

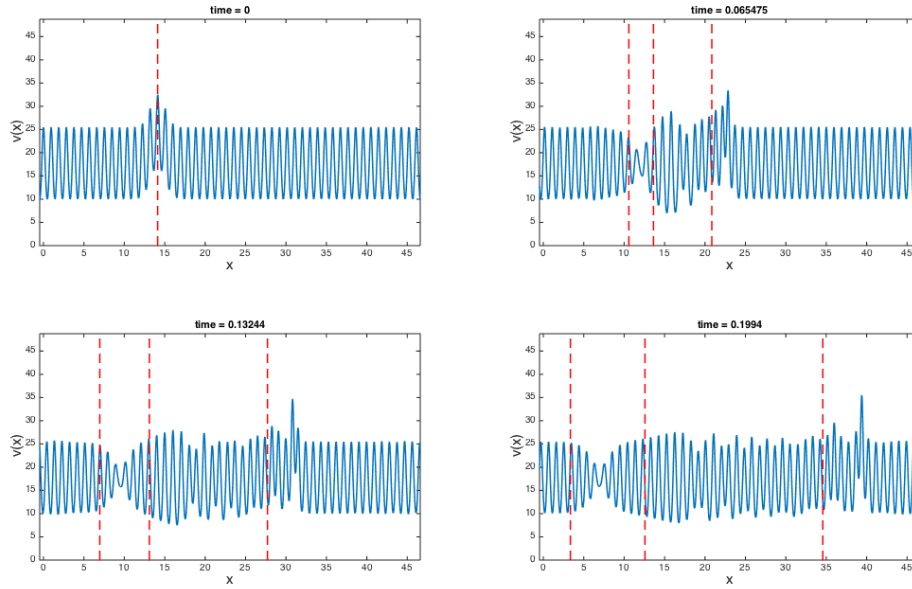


FIGURE 3.4. Évolution temporelle de l'onde périodique solution de l'équation de KdV associée à $(\mu, \lambda, c) = (-1400, -60, 60)$ et perturbée localement. En rouge les positions repérées grâce aux vitesses caractéristiques du système de Whitham.

par périodicité à partir d'un profil obtenu numériquement. Celui-ci est solution de l'équation de profil (64) dont la résolution est décrite à la section précédente. On représente sur la figure 3.4 l'évolution de l'onde périodique associée à $(\mu, \lambda, c) = (-1400, -60, 60)$ solution de l'équation de KdV et perturbée localement. Sur ces graphes sont représentées en rouge les positions remarquables se déplaçant aux vitesses caractéristiques du système de Whitham. L'évolution se fait de la gauche vers la droite puisque la vitesse de l'onde est positive $c = 50$. En haut à gauche, c'est-à-dire au temps initial, le repère rouge est fixé sur le centre de la perturbation. Au cours du temps, on voit apparaître les trois valeurs propres du système de Whitham toujours distinctes dans le cas de l'équation de KdV. À l'extérieur des vitesses de Whitham, c'est-à-dire aux extrémités gauche et droite, l'onde périodique n'a toujours pas subi la perturbation.

On remarque bien l'apparition dans la partie droite d'une onde solitaire se déplaçant légèrement plus rapidement que la plus grande vitesse de Whitham. Enfin dans les intervalles définis par les vitesses de Whitham, l'onde périodique a subi la perturbation et son profil a été modifié. On peut notamment observer dans l'intervalle compris entre les deux plus petites vitesses de Whitham, l'intervalle de gauche, la forte diminution d'amplitude.

Si l'on a toujours en tête le comportement décrit par Mikikits-Leitner [97], on peut analyser les différentes modifications de profil observées à la superposition d'une onde légèrement différente de l'onde initiale (décrite par l'auteur comme « modulée ») avec une ou plusieurs trainées oscillantes et un ou plusieurs solitons. De plus, la localisation des effet perturbatifs semble effectivement associée aux vitesses caractéristiques introduites par Whitham.

L'importance de ces vitesses est également illustré sur la figure 3.5 sur laquelle on représente la position relative des extrema de l'onde périodique perturbée que l'on étudie. Cette fois, on représente plus précisément les vitesses de Whitham. Bien que la perturbation soit dite *localisée*, le support de la gaussienne considérée ici est relativement large

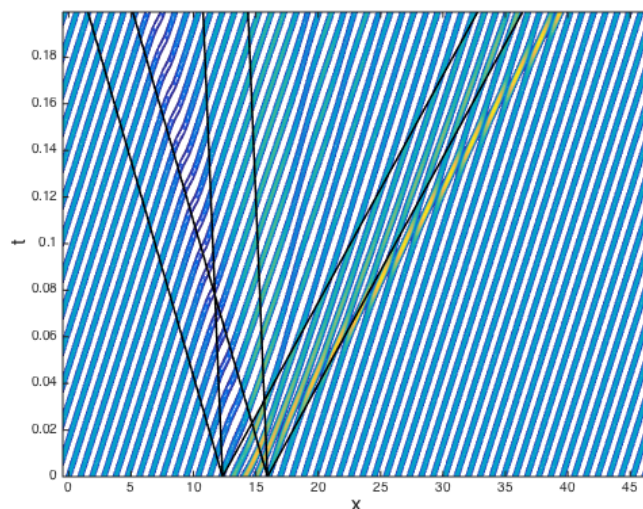


FIGURE 3.5. Évolution spatio-temporelle des extrema de l'onde périodique perturbée solution de l'équation de KdV dans le plan (x, t) . En noir, les vitesses de Whitham partant des deux extrémités de la perturbation gaussienne.

comme on peut le voir fig. 3.4 en haut à gauche. La perturbation opère a priori à l'intérieur d'un intervalle, que l'on va décrire ici par $[-2\sigma, 2\sigma]$. Pour analyser avec plus de précision les déplacements de perturbations, on place donc deux foyers de vitesses de Whitham aux extrémités de cet intervalle. Les deux jeux de trois vitesses sont représentés en noir sur la figure 3.5. On retrouve le soliton évoluant vers la droite et correspondant à la droite jaune. Le plus important à observer ici concerne la partie gauche du graphe. On distingue un *déphasage* dans les positions des extrema à l'intérieur de la partie gauche de ce qu'on le peut appeler le *cône* de perturbation.

On s'intéresse maintenant à l'équation de KdV généralisée avec $\gamma = 4$, c'est-à-dire une non-linéarité $p(v) = 5v^4$. En considérant cette équation, on cherche à observer le comportement d'une onde qui ne satisfait pas le critère de stabilité modulationnelle, c'est-à-dire une onde pour laquelle deux des vitesses de Whitham associées sont complexes conjuguées. L'évolution temporelle de l'onde associée à $(\mu, c, \lambda) = (-4.1155, 10, 3)$ est représentée sur la figure 3.6.

Dans ce cas précis, ce sont les parties réelles des vitesses de Whitham qui sont représentées en rouge. Le repère rouge représente la partie réelle commune des deux vitesses complexes conjuguées et le repère de droite correspond à la troisième vitesse. Le comportement de la solution quant à lui est très différent de celui de l'onde stable observée à la figure 3.4. La perturbation déclenche ici l'instabilité et on voit l'apparition de « paquets d'ondes modulés », notamment dans la zone repérée par la vitesse de Whitham *dégénérée*. On repère également de nouveau une onde solitaire se déplaçant vers la droite et plus rapide que la plus grande vitesse de Whitham.

L'évolution spatio-temporelle des extrema de cette même solution est représentée sur la figure 3.7. On y distingue nettement le passage de l'onde solitaire sur la droite. On remarque également la zone perturbée autour des vitesses de Whitham dont la partie réelle est la plus faible.

Enfin, observons l'évolution d'une onde solution du système d'Euler-Korteweg $N = 2$. On choisit une non-linéarité de type Boussinesq $p(v) = v - v^2$. On s'intéresse ici au cas $(\mu, \lambda_1, c) = (-0.0489, 0.6, 0.9)$ correspondant à une onde satisfaisant les deux critères de

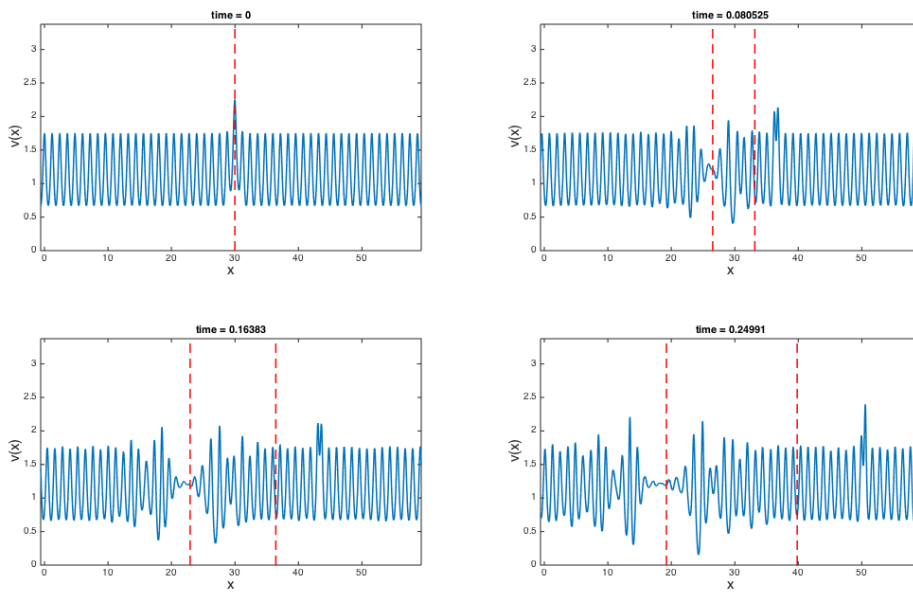


FIGURE 3.6. Évolution temporelle de l'onde périodique solution de l'équation de gKdV $\gamma = 4$ associée à $(\mu, \lambda, c) = (-4.1155, 10, 3)$ et perturbée localement. En rouge les positions repérées grâce aux vitesses caractéristiques su système de Whitham.

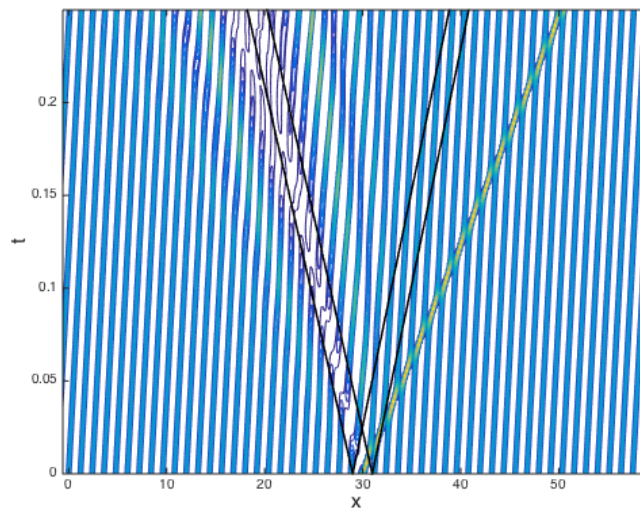


FIGURE 3.7. Évolution spatio-temporelle des extrema de l'onde périodique perturbée solution de l'équation de gKdV $\gamma = 4$ dans le plan (x, t) . En noir, les vitesses de Whitham partant des deux extrémités de la perturbation gaussienne.

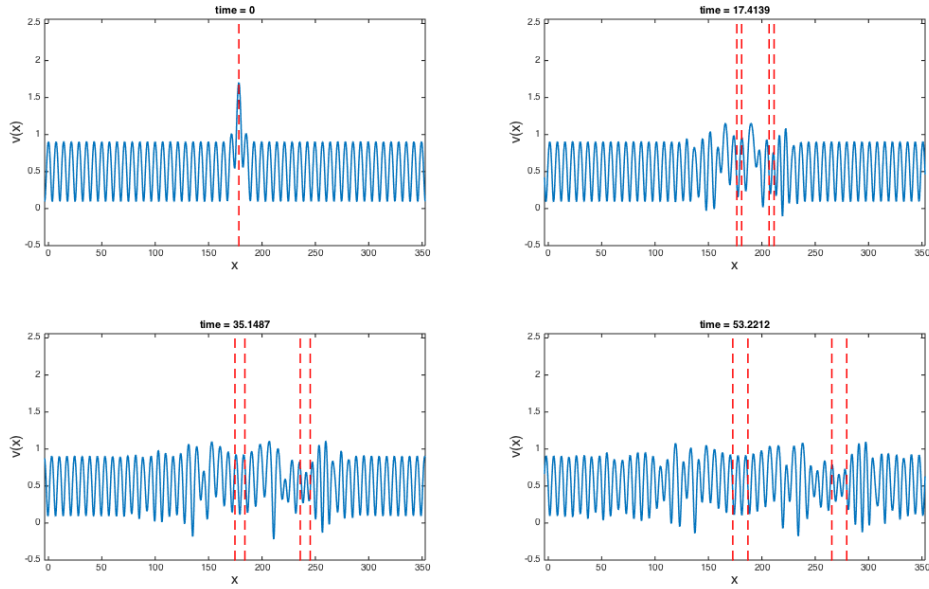


FIGURE 3.8. Évolution temporelle de l'onde périodique solution du système EKL avec non-linéarité de type Boussinesq associée à $(\mu, \lambda, c) = (-0.0489, 0.6, 0.9)$ et perturbée localement. En rouge les positions repérées grâce aux vitesses caractéristiques du système de Whitham.

stabilité, orbitale et modulationnelle. On ne représente que la première coordonnée du vecteur solution $\mathbf{U} = (v, u)^T$.

L'évolution temporelle de la solution du système est représentée sur la figure 3.8. Dans ce cas $N = 2$, les vitesses de Whitham, repérées en rouge, sont au nombre de quatre. On observe de nouveau un phénomène particulier au niveau de ces repères. La perturbation est placée au centre de la fenêtre comme l'indique la courbe en haut à gauche de 3.8. Au cours de l'évolution, on voit les quatre différentes vitesses de Whitham apparaître. La perturbation est localisée autour de ces quatre repères et le reste de l'onde, aux extrémités gauche et droite, reste inchangé. Sur les deux graphes du bas sur la figure 3.8, on commence à distinguer deux intervalles à l'intérieur desquels la solution conserve un certain profil. Ces deux intervalles sont ceux formés par les vitesses proches. Le profil de la solution au voisinage de ces zones reste stable.

L'évolution spatio-temporelle des extrema de la solution est représentée sur la figure 3.9. Ici, on n'observe plus d'ondes solitaires mais on constate une correspondance entre les différents déphasages des extrema et le cône de perturbation formé par les différentes vitesses de Whitham, même si la perturbation excède légèrement les limites de ce cône.

3.2. Perturbation co-périodique

Concentrons-nous maintenant sur des perturbations de même période que l'onde initiale. Numériquement, on forme ce type de perturbation en appliquant une perturbation gaussienne identique à chaque période de l'onde ou simplement en effectuant la résolution en ne considérant qu'une seule période à l'intérieur du domaine comme le représente la figure 3.10.

Afin d'analyser les effets de ce type de perturbations, on se concentre sur deux cas particuliers. Le premier est celui d'une onde orbitalement stable, solution de l'équation de KdV et correspondant aux paramètres $c = 60$, $\lambda = -60$ et $\mu = -1400$. Le second est

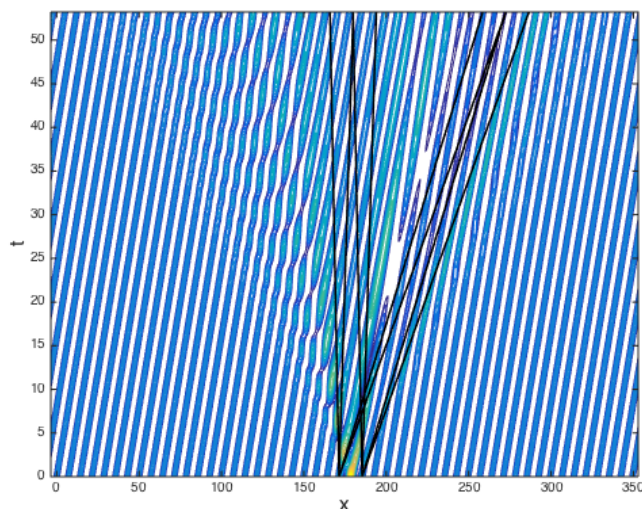


FIGURE 3.9. Évolution spatio-temporelle des extrema de l'onde périodique perturbée solution du système EKL avec non-linéarité de type Boussinesq dans le plan (x, t) . En noir, les vitesses de Whitham partant des deux extrémités de la perturbation gaussienne.

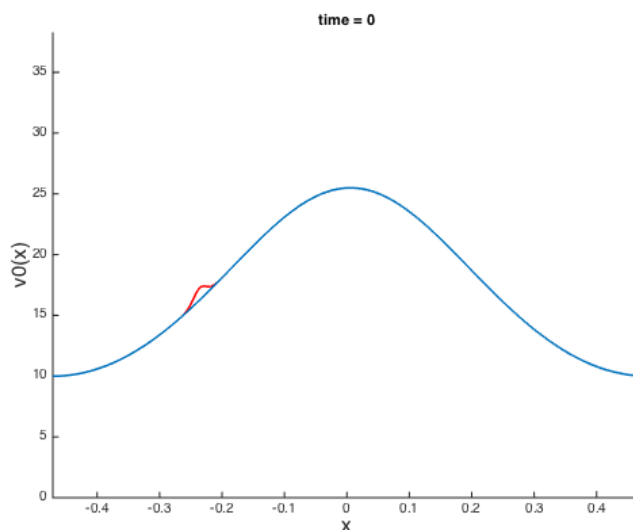


FIGURE 3.10. Illustration d'une perturbation co-périodique en rouge. Le profil représenté en bleu est le profil périodique solution de l'équation de KdV avec $c = 60$, $\lambda = -60$ et $\mu = -1400$. La perturbation gaussienne est définie par $x_0 = \Xi/4$ et $\sigma = 0.01$.

celui d'une onde spectralement instable, solution de l'équation de KdV généralisée $\gamma = 4$ avec $c = 50$, $\lambda = -48$ et $\mu = 24.15$. Pour cette onde, le nombre d'onde normalisée est $k = 0.5797$. L'évaluation du critère de stabilité co-périodique pour ce profil est représenté sur la figure 2.35 sur laquelle on peut lire que la quantité $n(\text{Hess}\Theta) - 1$ est bien impaire.

Il convient ici de préciser ce que l'on peut espérer observer lors de l'évolution des ces ondes perturbées. Notons tout d'abord que même au niveau linéaire dans le cas des ÉDO,

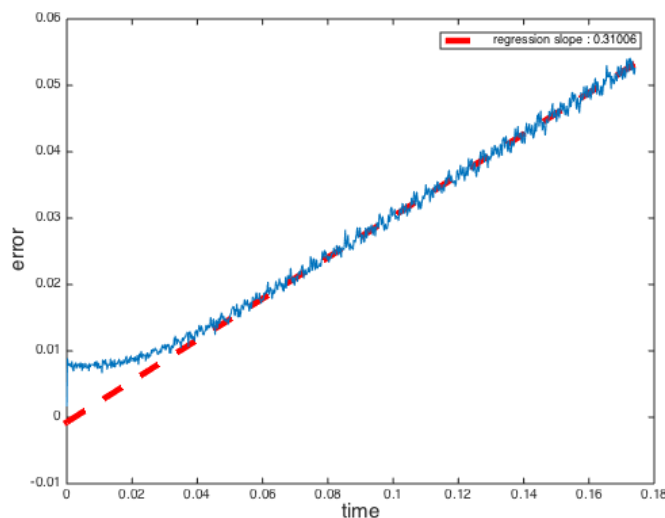


FIGURE 3.11. Erreur relative E_1 entre les solutions avec et sans perturbation pour l'équation de KdV et en fonction du temps. L'onde considérée est stable vis-à-vis de perturbations co-périodique. L'erreur ne tient pas compte d'éventuels déphasages entre les deux solutions.

il est difficile d'observer une différence entre un cas stable et un cas instable pour des opérateurs non-normaux. Le comportement en temps court est souvent dominé par une croissance des normes transitoire et une différence ne s'observe que sur des temps longs. Voir les analyses qualitative présentées en détail dans l'ouvrage de Trefethen & Embree [119, § I.1 ou encore fig. 33.3].

Par ailleurs dans une situation instable l'approximation linéaire n'est raisonnable que sur un temps court dépendant de la taille de la perturbation. Il faut donc partir d'une perturbation suffisamment petite pour que l'approximation linéaire soit une approximation raisonnable sur un temps suffisamment long pour que la différence de comportement de la dynamique linéaire soit notable. À ce stade nous sommes convaincus que l'on ne pourra pas visualiser facilement ces différences de comportement. Nous allons donc nous tourner vers une approche plus quantitative.

On ne peut donc plus simplement observer l'évolution temporelle des solutions comme on avait pu le faire aux figures 3.4, 3.6 et 3.8. Une manière d'observer la différence entre le cas d'une onde stable et celui d'une onde instable est de mesurer dans les deux cas, une différence avec la solution non perturbée. On pourra observer l'erreur en norme $L^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ ou alors en norme $L^\infty(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$

$$E_1(t) = \left\| \frac{v_{\text{perturbée}} - v}{v} \right\|_{L^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})}, \quad E_\infty(t) = \left\| \frac{v_{\text{perturbée}} - v}{v} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})}$$

On s'intéresse au régime de la croissance temporelle de ces erreurs.

Sur les figures 3.11 et 3.12 sont représentées respectivement l'erreur relative E_1 en fonction du temps dans le cas stable et le logarithme de cette moyenne d'erreur relative dans le cas spectralement instable pour des perturbations d'intensités comparables. C'est ici que l'on observe une différence de comportement. Dans le cas de l'onde stable de l'équation de KdV (fig. 3.11), sur l'intervalle de temps considéré l'erreur est croissante et polynomiale d'ordre 1 en temps. En revanche, dans le cas de l'onde instable de l'équation de KdV généralisée, la croissance est exponentielle par rapport au temps.

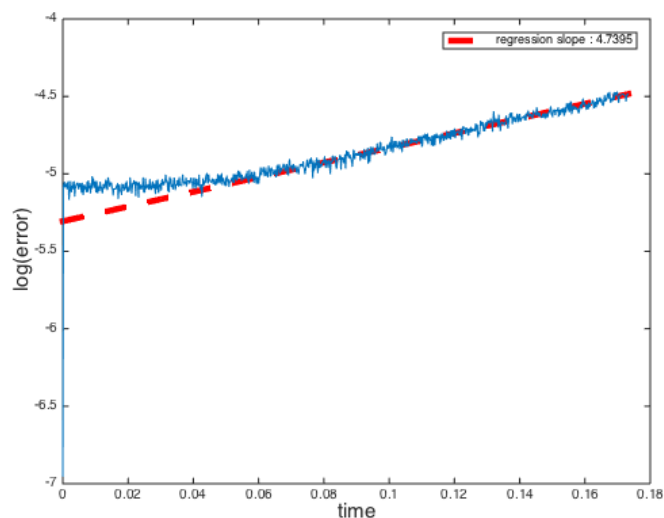


FIGURE 3.12. Erreur relative E_1 en *échelle logarithmique* entre les solutions avec et sans perturbation pour l'équation de KdV généralisée $\gamma = 4$ et en fonction du temps. L'onde considérée est spectralement instable vis-à-vis de perturbations co-périodique. L'erreur ne tient pas compte d'éventuels déphasages entre les deux solutions.

Sur les figures 3.13 et 3.14, on observe l'erreur E_∞ en fonction du temps, cette fois dans la même échelle. On constate toujours une croissance de l'erreur. Dans les deux cas E_1 et E_∞ , la croissance peut être interprétée comme une accumulation d'erreur en lien avec le déphasage entre les deux solutions que l'on ne prend pas en compte. Cependant, les croissances observées pour l'erreur E_∞ sont très faibles ce qui semble indiquer une saturation. L'effet d'accumulation est naturellement plus présent en norme L^1 . L'interprétation des tendances relatives à l'erreur E_∞ est moins évidente, la croissance de l'erreur associée à l'onde stable étant ici plus forte que celle associée à l'onde instable.

Bien que les observations du caractère spectralement instable de certaines ondes soient limitées, elle tendent néanmoins à confirmer les résultats de stabilité établis au chapitre précédent concernant l'équation de KdV généralisée.

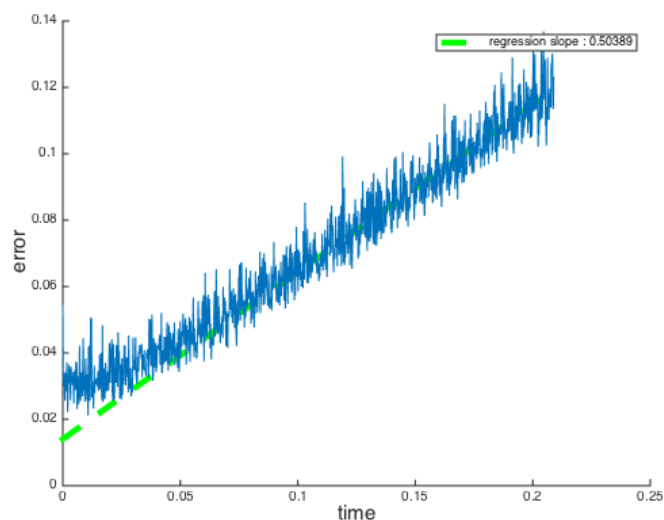


FIGURE 3.13. Erreur relative E_∞ entre les solutions avec et sans perturbation pour l'équation de KdV et en fonction du temps. L'onde considérée est stable vis-à-vis de perturbations co-périodique. L'erreur ne tient pas compte d'éventuels déphasages entre les deux solutions.

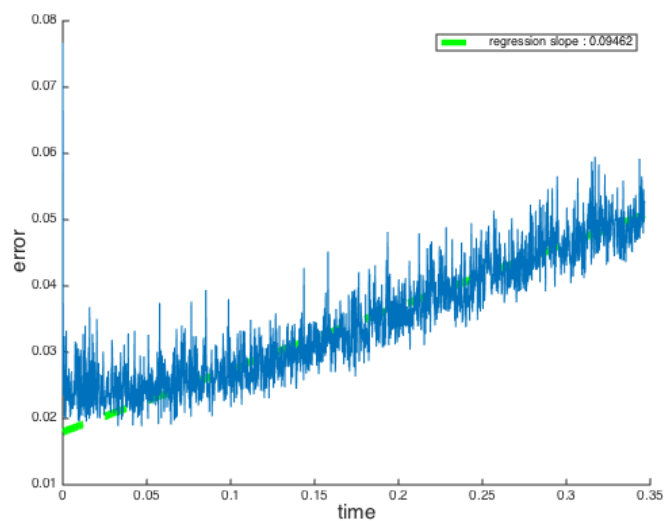


FIGURE 3.14. Erreur relative E_∞ en *échelle logarithmique* entre les solutions avec et sans perturbation pour l'équation de KdV généralisée $\gamma = 4$ et en fonction du temps. L'onde considérée est spectralement instable vis-à-vis de perturbations co-périodique. L'erreur ne tient pas compte d'éventuels déphasages entre les deux solutions.

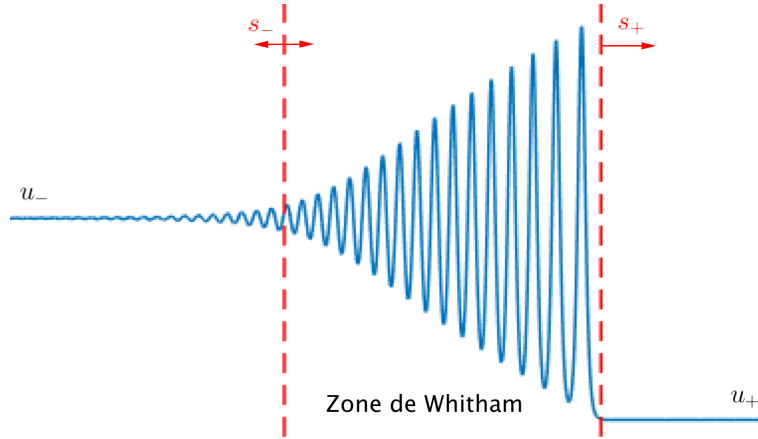


FIGURE 3.15. Structure d'un choc dispersif de l'équation de KdV $\varepsilon > 0$. Les états u_- et u_+ définissent la marche initiale. La vitesse s_- peut être positive ou négative. Elle correspond à la vitesse des ondes de faible amplitude formant l'aval du choc. La vitesse s_+ correspond à la vitesse du soliton formant l'amont du choc.

4. Chocs dispersifs

L'étude des chocs dispersifs connaît actuellement un véritable essor. Ces chocs particuliers, à la structure oscillante composée d'une gamme d'ondes périodiques modulées, sont le résultat d'un équilibre entre les effets non-linéaires et les effets dispersifs. En effet, les équations que l'on considère sont toutes des perturbations dispersives d'ÉDP hyperboliques non-linéaires et on peut se demander quels sont les effets de la dispersion sur leurs ondes de chocs. À partir des études de Whitham sur les modulations [121], de nombreux travaux se sont basés sur l'utilisation du système d'équations modulées pour la description de la structure des chocs dispersifs, comme ceux de El, Hoefer & Shearer [50, 75, 52, 53] ou ceux de Grava & Klein [65, 66]. La première formulation de ces chocs à partir des équations modulées remonte à un travail fondateur de Gurevich & Pitaevskii [71] sur l'équation de Korteweg-de Vries. Elle utilise l'écriture des équations de Whitham écrites sur les invariants de Riemann et l'existence de solutions analytiques de l'équation de KdV, dont on peut trouver une description complète dans l'ouvrage de Kamchatnov [82].

4.1. Chocs dispersifs dans les systèmes intégrables : équation de KdV

On s'intéresse dans un premier temps au cas intégrable de l'équation de KdV

$$v_t + (3v^2)_x + \varepsilon v_{xxx} = 0.$$

L'existence de résultats analytiques concernant cette équation nous permet de valider le schéma numérique que nous utilisons pour la résolution du système hamiltonien en présence de données initiales relativement « raides », c'est-à-dire proches d'être discontinues. La figure 3.15 représente la structure d'un choc dispersif de l'équation de KdV pour $\varepsilon > 0$. Dans ce cas, un soliton forme l'amont du choc et des ondes harmoniques, ou de faible amplitude, forment l'aval. La polarité du soliton est positive, c'est-à-dire qu'il pointe vers le haut. Dans le cas où le signe de la dispersion est inversé, le soliton forme l'aval du choc et sa polarité est négative tandis que les ondes harmoniques forment l'amont du choc. Pour l'équation de KdV, l'inversion du signe de la dispersion change complètement l'allure du choc comme le montre la figure 3.16 puisqu'elle modifie à la fois sa polarité (orientation du soliton) et sa direction. Dans la suite, on étudiera uniquement le cas $\varepsilon > 0$.

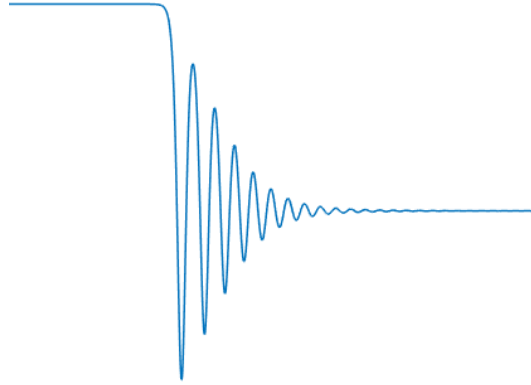


FIGURE 3.16. Structure d'un choc dispersif de l'équation de KdV $\varepsilon < 0$.

4.1.1. Solution analytique de l'équation de KdV

Dans le cas de l'équation de KdV, les travaux de Whitham [121] ont permis d'établir de nombreux résultats à propos des équations modulées. L'existence d'invariants de Riemann nous fournit une version diagonalisée du système modulé ainsi qu'une famille de solutions analytiques de l'équation de KdV à partir de fonctions elliptiques. Ce qui suit est adapté de l'ouvrage de Kamchatnov [82], qui renferme également un formulaire à propos des fonctions elliptiques, et de l'article de El, Hofer & Shearer [53].

On rappelle l'expression polynomiale du potentiel associé à l'équation de profil pour KdV

$$\mathcal{W}(v; \lambda, c) = v^3 - \frac{c^2}{2}v^2 - \lambda v.$$

Les trois racines de l'équation

$$\mu - \mathcal{W}(v; \lambda, c) = 0$$

sont notées $v_1 \leq v_2 \leq v_3$. Les solutions périodiques de l'équation de KdV associée à (μ, λ, c) sont alors donnée par

$$v(t, x) = v_3 - (v_3 - v_2) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{v_3 - v_2}{2}} (x - ct), m \right),$$

où la vitesse de phase c et le module m sont donnés par

$$c = 2(v_1 + v_2 + v_3) \quad m = \frac{v_3 - v_2}{v_3 - v_1}.$$

On fait souvent référence à cette solution en parlant d'onde *cnoidale* puisqu'elle peut aussi être exprimée à partir de la fonction elliptique cn .

L'hypothèse de modulation lente implique de considérer les paramètres (μ, λ, c) ou (v_1, v_2, v_3) variables en temps et en espace. Cette hypothèse donne lieu à l'écriture d'un système modulé, ou système de Whitham décrit dans les chapitres précédents. L'avantage de l'équation de KdV est qu'elle est complètement intégrable et qu'on peut lui associer une infinité de lois de conservation. Dans ce cadre, on peut réécrire le système de Whitham sous forme diagonale en faisant apparaître les invariants de Riemann du système $r_1 \leq r_2 \leq r_3$

$$r_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad r_2 = \frac{1}{2}(v_3 + v_1), \quad r_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_3).$$

Les équations de Whitham s'écrivent alors

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + V_i(r_1, r_2, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial x},$$

où les vitesses caractéristiques $V_1 \leq V_2 \leq V_3$ sont données par

$$(90) \quad \begin{aligned} V_1 &= c + \frac{4(r_2 - r_1)(1 - m)K(m)}{E(m)}, \\ V_2 &= c - \frac{4(r_2 - r_1)(1 - m)K(m)}{E(m) - (1 - m)K(m)}, \\ V_3 &= c + \frac{4(r_3 - r_1)K(m)}{E(m) - K(m)}. \end{aligned}$$

Les fonctions $K(m)$ et $E(m)$ sont les intégrales elliptiques de première et seconde espèce respectivement. La vitesse c et le module m s'expriment également en fonction des invariants de Riemann

$$c = 2(r_1 + r_2 + r_3) \quad m = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}.$$

Les solutions périodiques de l'équation de KdV s'écrivent alors en fonction des r_i

$$(91) \quad v(t, x) = r_2 + r_3 - r_1 - 2(r_2 - r_1) \operatorname{sn}^2(\sqrt{r_3 - r_1}(x - ct + x_0), m).$$

Cette fois, on a ajouté x_0 qui joue le rôle de déphasage initial. Ce déphasage reste indéterminé dans la théorie de Whitham telle qu'elle est décrite ici. Toute solution est donc déterminée à translation près. L'obtention de cette phase initiale requiert de déterminer le système modulé à un ordre plus élevé du développement asymptotique (19). Même si on ne présentera pas ce développement ici, cette phase initiale a pu être déterminée pour certaines conditions initiales dans le cas de l'équation de KdV [52, 65].

4.1.2. Problème de Gurevich-Pitaevskii

Le problème formulé par Gurevich & Pitaevskii consiste à résoudre l'équation de KdV en considérant la donnée initiale

$$(92) \quad u(0, x) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases}$$

On fait l'hypothèse que la partie oscillante du choc que l'on observe sur la figure 3.15 peut être représentée par une onde modulée dont les paramètres sont une solution particulière des équations de Whitham. Les deux extrémités de cette partie oscillante sont alors constituées par une onde harmonique d'un côté et par un soliton de l'autre. L'intérieur de cette zone est représenté par un éventail complet d'ondes dont les paramètres varient entre ces deux limites pour lesquelles $m = 0$ et $m = 1$ respectivement. La solution à l'extérieur de la zone du choc est régie par l'équation de Burgers-Hopf, qui est la réduction de l'équation de KdV au cas sans dispersion.

Dans la limite harmonique, le module m s'annule, ce qui se traduit par $r_2 = r_1$, et on observe la fusion de deux vitesses caractéristiques

$$m = 0, \quad V_2(r_1, r_2, r_3) = V_1(r_1, r_2, r_3) = 6(2r_1 - r_3) = V^-(r_1, r_2, r_3).$$

On peut aussi voir qu'à la limite, le système de Whitham se réduit en deux équations, dont l'une est l'équation de Burgers portant sur r_3 et pour laquelle on a $V_3 = 6r_3$. Au contraire, dans la limite soliton on observe la fusion

$$m = 1, \quad V_2(r_1, r_2, r_3) = V_3(r_1, r_2, r_3) = 2(2r_3 + r_1) = V^+(r_1, r_2, r_3),$$

et dans ce cas, l'équation de Burgers porte sur r_1 et on voit $V_1 = 6r_1$ et on a $r_2 = r_3$.

Le problème que se sont posé Gurevich & Pitaevskii est de déterminer une solution des équations modulées $r_i(t, x)$, $i = 1, 2, 3$ dont l'onde associée $v(t, x)$ donnée par (91) représente la zone oscillante du choc dispersif. Ce problème consiste donc à déterminer une solution auto-similaire des équations de Whitham dont les conditions aux bords soient compatibles avec les états macroscopiques de l'onde définie à l'extérieur de la zone oscillante par u_{\pm} .

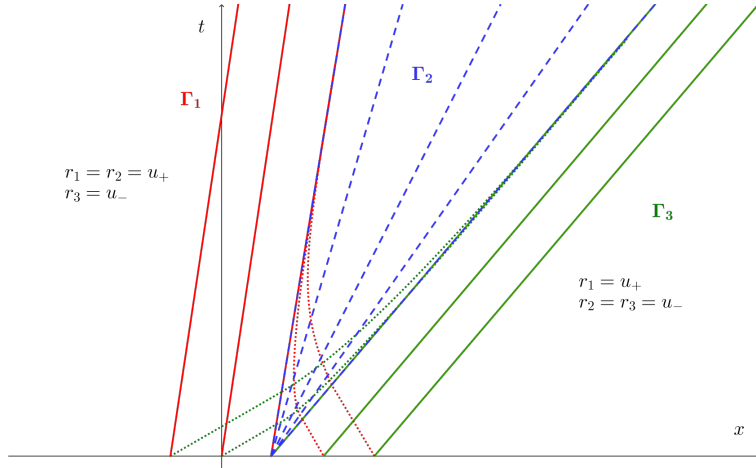


FIGURE 3.17. Schéma des courbes caractéristiques du système de Whitham associé à une ÉDP de type (KdV). En bleu, l'onde de détente de la 2-caractéristique Γ_2 . En rouge et vert, respectivement les 1-caractéristiques Γ_1 et 3-caractéristiques Γ_3 .

Dans le cas de l'équation de KdV, la stricte hyperbolicité (les vitesses V_i sont réelles et distinctes) et la vraie non-linéarité caractérisée par

$$\frac{\partial V_i}{\partial r_i} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

sont deux propriétés importantes du système de Whitham vérifiées pour $0 < m < 1$ [82] qui assurent que l'évolution de discontinuité initiale peut être représentée par une modulation auto-similaire de la solution (91) qui est une onde de détente du système de Whitham vérifiant

$$r_1 = u_+, \quad r_3 = u_-, \quad V_2(u_+, r_2, u_-) = \frac{x}{t}.$$

Les courbes caractéristiques du système de Whitham associé à l'équation de KdV sont représentées schématiquement sur la figure 3.17. Les 2-caractéristiques représentent une onde de détente dont les vitesses aux extrémités sont V_- et V_+ de gauche à droite. En dehors de la zone définie par la 2-détente, toutes les caractéristiques sont des droites puisque les invariants de Riemann r_i restent constant. À gauche de la détente, les 2-caractéristiques sont alignées avec les 1-caractéristiques tandis qu'à droite elles sont alignées avec les 3-caractéristiques en raison de la fusion de certains invariants. La courbure des caractéristiques à l'intérieur de la détente est schématique et tient compte des relations $V_3 = 6r_3 = 6u_-$ côté harmonique et $V_1 = 6r_1 = 6u_+$ côté soliton.

L'onde de détente est définie pour tous les temps $t > 0$ et on peut définir les vitesses des extrémités du choc dispersif s_- en aval (côté faible amplitude ici) et s_+ en amont (côté soliton ici). Ces deux vitesses sont obtenues en considérant donc $m = 0$ ou $m = 1$ dans l'expression de V_2 dans (90) en injectant les valeurs correspondantes des invariants de Riemann r_i

$$s_- = V_-(u_+, u_+, u_-) = 6(u_+ - \Delta), \quad s_+ = V_+(u_+, u_-, u_-) = 6(u_+ + \frac{2}{3}\Delta),$$

où $\Delta = u_- - u_+$ est le saut à travers le choc dispersif. On peut également calculer l'amplitude du soliton qui forme l'amont du choc $a_+ = 2\Delta$.

Il est important de remarquer que la vitesse de l'onde harmonique s_- coïncide avec la vitesse de groupe des ondes pour un certain nombre d'onde k_0 et que la vitesse du

soliton s_+ coïncide avec la vitesse de phase à la limite $k \rightarrow 0$. Par définition, la relation de dispersion des ondes de l'équation de KdV s'écrit

$$\omega(k, v) = 6kv - k^3.$$

La vitesse de groupe est alors définie par

$$v_g(k, v) = \partial_k \omega(k, v) = 6v - 3k^2,$$

tandis que la vitesse de phase vaut, pour $k \neq 0$

$$v_\varphi(v, k) = \frac{\omega}{k} = 6v - k^2.$$

Cette correspondance des vitesses est une propriété générale du système de Whitham indépendante du caractère complètement intégrable. On sera ainsi en mesure d'évaluer numériquement les vitesses de groupe et de phases limites s_- et s_+ pour des systèmes non-intégrables.

Remarque 3.7. La relation de dispersion permet de connaître le sens du choc dispersif. Par définition, le nombre d'onde k est décroissant à travers le choc dispersif en allant des ondes harmoniques au soliton. À proximité de la limite harmonique, si la vitesse de groupe augmente quand le nombre d'onde diminue ($\omega_{kk} < 0$) alors les ondes harmoniques sont en aval. À l'inverse, si la vitesse de groupe diminue quand le nombre d'onde diminue ($\omega_{kk} > 0$) alors les ondes harmoniques sont placées en amont.

Il existe des conditions d'admissibilité pour un choc dispersif. Dans le cadre actuel d'une équation scalaire avec non-linéarité convexe $p(v) = 3v^2$, cette condition s'écrit

$$s_- < p'(u_-), \quad p'(u_+) < s_+, \quad s_- < s_+.$$

Ces conditions sont l'analogie des conditions d'entropie définies dans le cadre des chocs de Lax, mais dans le cadre dispersif. Ces conditions assurent en quelque sorte que les caractéristiques de l'équation de Burgers-Hopf, issues de l'extérieur du choc intersectent la zone du choc dispersif $s_-t < x < s_+t$ et donc transfèrent l'information de la condition initiale à l'intérieur de cette zone.

Remarque 3.8. La condition de saut de Rankine-Hugoniot associée aux chocs de Lax ne s'applique pas dans le cadre d'un choc dispersif. Par comparaison, notons que

$$s_- < s = \frac{u_- + u_+}{2} < s_+.$$

4.1.3. Comparaisons numériques

On souhaite comparer les chocs dispersifs que l'on peut obtenir numériquement par deux méthodes. La première est la résolution directe du problème de Riemann associé à l'équation de KdV. La seconde est la solution fournie par le système de Whitham, c'est-à-dire construite à partir d'une onde de détente des invariants de Riemann et la solution analytique de l'équation de KdV. L'objectif est d'utiliser cette comparaison pour tester la robustesse de notre schéma aux différences finies en présence de données initiales « raides », comme celles qui déclenchent l'apparition des chocs dispersifs.

Plusieurs difficultés sont à mentionner en premier lieu. La première concerne la phase initiale x_0 de la solution analytique (91) qui est une inconnue. Le calcul de l'onde de détente du système de Whitham associée au choc dispersif ne fournira la solution analytique qu'à translation spatiale près. D'un autre côté, on n'utilise pas tout à fait une condition initiale sous forme de marche (92) lors de la résolution de l'équation de KdV. On considère plutôt une condition initiale plus régulière tout en conservant la forme de marche. De plus, on rappelle que notre schéma aux différences finies est écrit pour des conditions aux bords

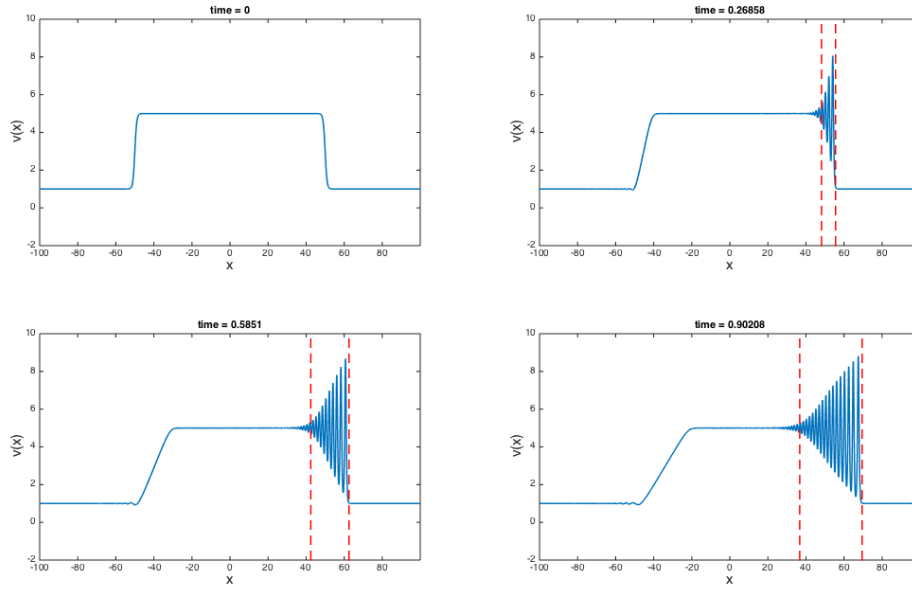


FIGURE 3.18. Évolution spatio-temporelle d'une marche régularisée par l'équation de KdV. La condition initiale est représentée en haut à gauche. L'évolution voit l'apparition d'un choc dispersif puis son extension. En rouge sont représentées les positions repérées par les vitesses s_- et s_+ .

périodiques. Ainsi, la condition initiale que l'on considère généralement est un créneau simple. Le temps $t_c > 0$ d'apparition du choc dispersif est donc approché par celui de l'apparition du choc de l'équation de Burgers

$$v_t + 6v v_x = 0,$$

c'est-à-dire

$$t_c = \frac{1}{\max_{\xi \in \mathbb{R}} [-6v'_0(\xi)]}.$$

Les résultats numériques concernant l'équation de KdV sont présentés sur les figures 3.18 et 3.19. On peut y voir l'évolution spatio-temporelle du créneau initial décrit ci-dessus. Le choc apparaît uniquement après un temps $t_c = 0.083$ dans le cas présent. L'évolution se poursuit en voyant l'agrandissement de la zone de Whitham. Sur ces graphes spatio-temporels, on peut également observer la détente du profil arrière du créneau par l'équation de KdV. Cette détente fait également apparaître des oscillations dispersives, ici au pied de la marche, comme celle décrites par El, Hofer & Shearer [53].

Sur la figure 3.19, on peut observer la superposition de deux solutions. La solution numérique de l'équation de KdV et la solution analytique calculée à partir de (91) dans laquelle les paramètres sont solution d'une détente du système de Whitham. Pour tenir compte du fait que le choc ne se forme pas immédiatement, on a translaté en temps l'onde de détente du système de modulation. De plus, la solution analytique est déterminée à translation spatiale près. On peut également y observer la solution de l'équation de KdV sans dispersion ou équation de Burgers. On vérifie bien que la vitesse du choc de Lax définie par les conditions de Rankine-Hugoniot s est bien comprise entre les deux vitesses s_{\pm} qui définissent la zone de choc dispersif de Whitham. Ces vitesses sont matérialisées en noir et forment le contour des lignes de niveau du choc dispersif.

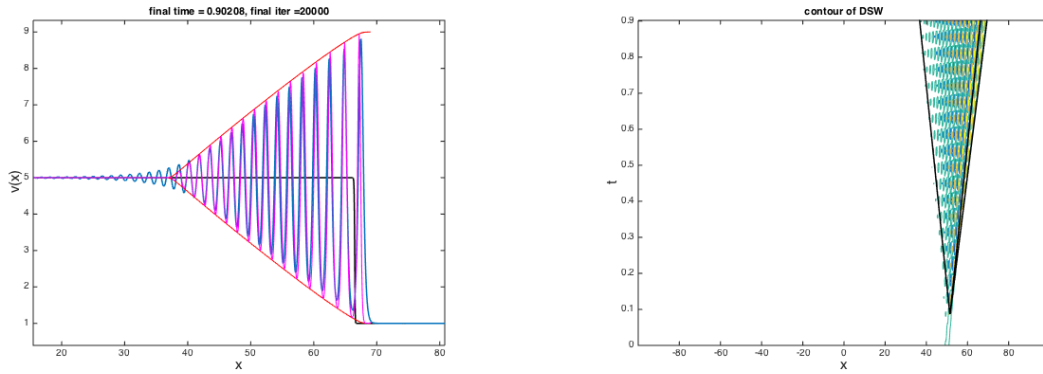


FIGURE 3.19. À gauche, superposition du choc dispersif calculé à partir de l'équation de KdV (en bleu) et de celui calculé à partir de la détente du système de Whitham associé (en mauve). L'enveloppe du choc est représentée en rouge et la solution de l'équation de Burgers (sans dispersion) est affichée en noir. À droite, lignes de niveau du choc dans le plan (x, t) . Les vitesses $s_- < s < s_+$ sont représentées en noir.

4.2. Non-linéarité non convexe

On s'intéresse à la description de la structure des chocs associés à des non-linéarités $p(v)$ non-convexes comme celle fournie par El, Hofer & Shearer [53] dans le cas de l'équation de KdV modifiée pour laquelle $p(v) = 4v^3$ que l'on écrit de nouveau avec un paramètre de dispersion ε

$$v_t + (4v^3)_x + \varepsilon v_{xxx} = 0.$$

Même si l'équation de mKdV entre dans la catégorie complètement intégrable au même titre que KdV, on fait le choix de mettre de côté cette structure et de présenter les différences fondamentales entre ces deux équations appuyées par un échantillon de résultats numériques. Notons en préambule que contrairement à ce qui se passe pour KdV, pour mKdV le signe de ε altère non seulement l'allure mais aussi la structure des solutions.

La conséquence immédiate de la non-convexité de la non-linéarité est que les champs caractéristiques associés au système sans dispersion ne sont plus vraiment non-linéaires. En effet, la vitesse caractéristique de l'équation sans dispersion dans le cas de mKdV est $V(v) = 12v^2$, dont la dérivée s'annule en zéro. Le système de Whitham associé à mKdV hérite naturellement de cette propriété, au moins dans les régimes extrêmes. Malheureusement, la description des chocs dispersifs par les modulations de Whitham nécessite l'existence d'une onde de détente reliant les deux régimes soliton et harmonique. Or, une onde de détente ne peut pas exister si le champ caractéristique associé n'est pas vraiment non-linéaire. Pour observer un choc dispersif au sens *classique*, les états initiaux u_{\pm} de la marche devront vérifier une condition spéciale de convexité en plus des conditions d'admissibilité du choc dispersif. Pour l'équation de mKdV, ces conditions s'écrivent

$$(93) \quad |u_-| > |u_+|, \quad u_- u_+ > 0.$$

La condition de gauche est la condition d'admissibilité du choc dispersif déduite de manière analogue au cas de l'équation de KdV. La condition de droite est la condition de convexité puisqu'elle s'écrit $p''(u_-)p''(u_+) > 0$.

La non-convexité est aussi à l'origine de la présence de chocs dits *sous-compressifs* dans le cas $\varepsilon < 0$. Cette dénomination en lien avec la dynamique des gaz caractérise l'existence d'un choc dont la vitesse est subsonique en amont et en aval. Si l'on considère la loi de

conservation

$$v_t + (4v^3)_x = 0,$$

la vitesse caractéristique $V(v) = 12v^2$ est un analogue de la vitesse du son définie en dynamique des gaz. La vitesse des ondes de choc est définie par la condition de Rankine-Hugoniot et s'écrit

$$s = u_+^2 + u_+ u_- + u_-^2,$$

et les chocs sous compressifs sont caractérisés par

$$s < V(u_{\pm}).$$

Ces chocs sous-compressifs du système sans dispersion sont associés à l'apparition d'une structure particulière dénommée *kinks* dans la littérature anglo-saxonne et qui désigne un front d'onde monotone.

Dans le cas $\varepsilon > 0$, il n'existe pas de chocs sous-compressifs mais en revanche, la non-convexité de la non-linéarité entraîne l'apparition de structures doubles que l'on appelle *chocs dispersifs de contact*. La présence de ces chocs dispersifs non standards est également due à la perte d'hyperbolicité du système de Whitham associé à mKdV. Cette propriété peut être déduite de l'écriture sous forme diagonale du système de Whitham via ses invariants de Riemann. Elle est aussi observable à partir de nos résultats numériques concernant la stabilité modulationnelle de mKdV sur la figure 2.19. La structure des chocs dispersifs de contact ressemble fortement à celle d'un choc dispersif classique. La différence fondamentale entre ces deux structures est que dans le cas d'un choc classique, seulement l'un des invariants de Riemann subit une détente (r_2 dans l'exemple précédent) alors que dans le cas d'un choc dispersif de contact, deux invariants de Riemann subissent une détente. C'est encore une fois la non-hyperbolicité du système qui autorise ce type de solution.

Les conditions d'apparition de ces structures non-standards correspondent à des choix particuliers dans la définition de la condition initiale u_{\pm} . Pour une classification complète des différentes structures de chocs dispersifs pour l'équation de mKdV voir les travaux de El, Hofer & Shearer [53]. On présente ici des exemples correspondants aux différentes structures décrites ci-dessus. Sur la figure 3.20 est représentée l'évolution spatio-temporelle d'une marche régularisée vérifiant les conditions d'admissibilité (93) par l'équation de mKdV. On y distingue la création d'un choc dispersif en amont de la marche ainsi que d'une onde de raréfaction en aval. La structure de ce choc dit *classique* est tout à fait similaire à celle de l'équation de KdV en dehors d'une variation de forme de l'enveloppe du choc.

La figure 3.21 présente une onde double kink/choc dispersif pour $\varepsilon < 0$. L'apparition de ce genre de structure est associée aux conditions initiales vérifiant $-u_- < u_+ < 0$. Dans ce cas, les vitesses d'extensions de la zone de Whitham du choc sont connues (voir [53, § 5.2.1]) et leurs valeurs pour $p(v) = 4v^3$ sont

$$s_- = 4(u_-^2 + 2u_+^2) \quad s_+ = 4(6u_-^2 - 3u_+^2),$$

tandis que la vitesse du kink vaut

$$s_k = 4u_-^2.$$

La distance entre le front d'onde du kink et le soliton de l'extrémité du choc dispersif est croissante ($s_k < s_-$).

Enfin, on peut observer sur la figure 3.22 la présence d'une onde double *choc dispersif de contact/choc dispersif*. Cette structure est construite comme une juxtaposition. D'après les résultats de [53, § 5.2.2], la vitesse de séparation entre les deux chocs dispersifs vaut

$$s_* = 4(6u_+^2 - 3 * u_-^2),$$

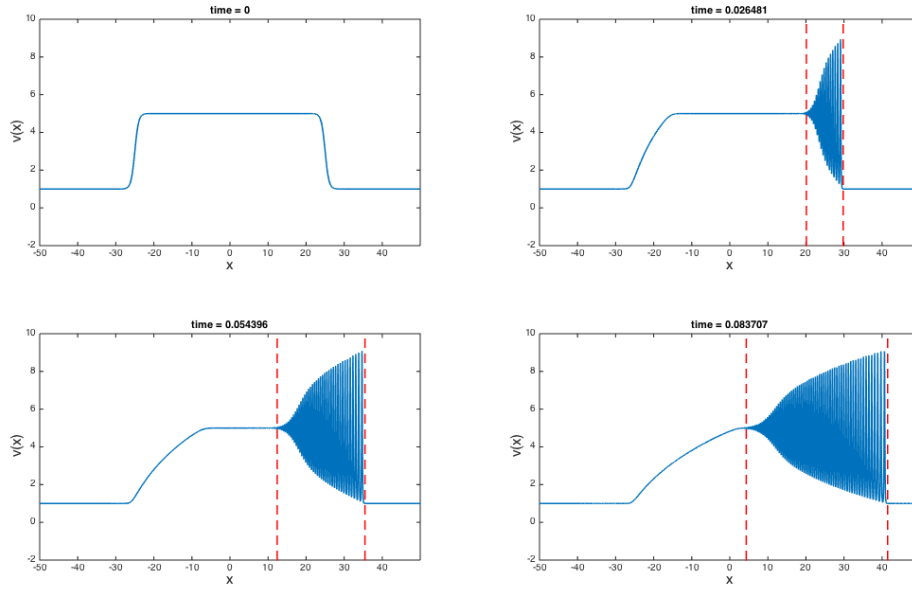


FIGURE 3.20. Évolution spatio-temporelle d'une marche régularisée par l'équation de mKdV $\varepsilon > 0$. La condition initiale est représentée en haut à gauche. L'évolution voit l'apparition d'un choc dispersif *classique* puis son extension. En rouge sont représentées les positions repérées par les vitesses s_- et s_+ .

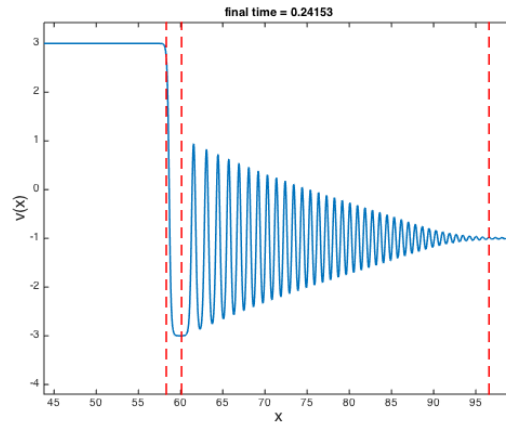


FIGURE 3.21. Onde double *kink/choc dispersif* de l'équation de mKdV $\varepsilon < 0$. En rouge sont représentées les positions repérées par les vitesses s_k , s_- et s_+ (de gauche à droite).

et les vitesses amont et aval de la totalité de la structure sont données par

$$s_- = 4(6u_+^2 - 3u_-^2) \quad s_+ = 4(2u_-^2 + u_+^2).$$

La principale différence entre un choc dispersif classique et un choc dispersif de contact est la forme de l'enveloppe de la zone de Whitham. Dans le cas d'un choc classique l'enveloppe est relativement droite tandis que dans le cas du choc dispersif de contact l'enveloppe est plus arrondie ou bombée.

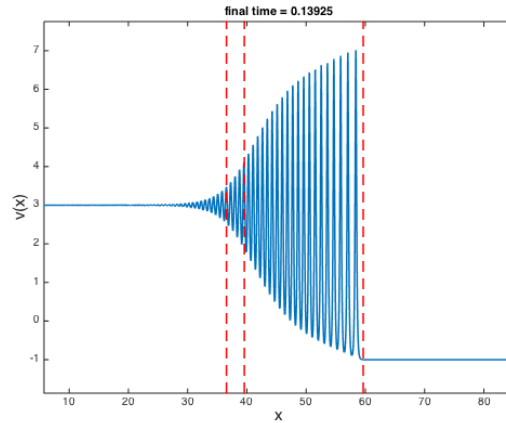


FIGURE 3.22. Onde double *choc dispersif de contact/choc dispersif* de l'équation de mKdV $\varepsilon > 0$. En rouge sont représentées les positions repérées par les vitesses s_- , s_* et s_+ .

4.3. Chocs dispersifs des systèmes non-intégrables

4.3.1. À propos des ondes de détente du système de Whitham

L'un des objectifs de cette thèse était l'étude des chocs dispersifs qui apparaissent éventuellement comme solution de systèmes non-intégrables. Pour ces équations, on ne dispose plus de solutions analytiques, ni d'écriture du système d'équations modulées à partir d'invariants de Riemann. Néanmoins, l'objectif était d'exploiter notre formulation du système de Whitham en variables (μ, λ, c) présentée dans le second chapitre de ce manuscrit et adapter la méthode décrite par Gurevich & Pitaevskii.

Les difficultés sont nombreuses et sont autant de raisons pour lesquelles nous ne sommes pas en mesure aujourd'hui de présenter des comparaisons de structures utilisant la résolution d'une détente du système de Whitham. La principale concerne le comportement asymptotique de la matrice du système de Whitham dans le régime extrême associé au soliton. Les imprécisions numériques inhérentes à l'exploitation de la matrice $\text{Hess}\Theta$ sont telles que toute utilisation est rendue impossible dans ce régime. Or la construction d'un choc dispersif nécessite d'exploiter une gamme complète d'ondes modulées.

Une méthode plus adaptée à l'étude de la matrice du système de Whitham dans le régime soliton a été décrite dans le second chapitre. Même si celle-ci a fourni des résultats plus qu'acceptables dans le cas de l'équation de KdV, les difficultés liées au paramétrage des ondes dans les variables (k, \mathbf{M}, P) compliquent son utilisation. Ces difficultés sont détaillées dans la section 6.3 du chapitre 2.

Bien sûr, développer ce type de méthode pour résoudre le système de Whitham n'a d'intérêt que si le système hamiltonien associé n'est pas complètement intégrable. Néanmoins, on a pu voir que l'existence même de chocs dispersifs, disons classiques, est conditionnée par le fait que le système de Whitham doit être hyperbolique sur l'ensemble de la gamme d'ondes qu'il décrit. Or sur l'ensemble des cas d'équations non-intégrables sur lesquels nous avons travaillé, nous ne sommes pas en mesure de caractériser le caractère hyperbolique global du système de Whitham. Ceci est de nouveau expliqué par le comportement du système dans le régime soliton.

4.3.2. Caractérisation de la zone de Whitham

Si l'on n'est pas capable aujourd'hui d'effectuer une comparaison concernant la structure oscillante de la zone de Whitham dans les cas non-intégrables, on peut tout de même calculer ses vitesses amont et aval en exploitant la relation de dispersion des ondes dans

le cas scalaire $N = 1$. On présente le raisonnement dans le cas de l'équation de gKdV qui est une adaptation de la méthode décrite par El dans [50] pour KdV. La relation de dispersion s'écrit dans le cas d'une non-linéarité générale $p(v)$ et en présence d'un coefficient de dispersion ε

$$\omega(k, v) = k p(v) - \varepsilon k^3 .$$

La vitesse de groupe est alors définie par

$$(94) \quad v_g(k, v) = \partial_k \omega(k, v) = p(v) - 3\varepsilon k^2 ,$$

tandis que la vitesse de phase vaut, pour $k \neq 0$

$$(95) \quad v_\varphi(v, k) = \frac{\omega}{k} = p(v) - \varepsilon k^2 .$$

La vitesse des ondes harmoniques est donnée par la vitesse de groupe calculée en l'état u_\pm auquel ces ondes sont associées. On rappelle que selon le signe de ε , les ondes harmoniques à l'extrémité du choc dispersif peuvent être placées en amont ou en aval du choc et donc être associées à l'état u_+ ou à l'état u_- . La vitesse de l'onde solitaire est donnée par la vitesse de phase associée à l'état \pm correspondant et dans la limite $k \rightarrow 0$.

Commençons par le cas plus simple de la vitesse harmonique. Pour calculer la vitesse de groupe, il faut déterminer le nombre d'onde $k_0 > 0$ associé aux ondes de faible amplitude. À la limite harmonique, le système de Whitham se réduit à

$$(96) \quad \begin{cases} k_t + \omega(k, \langle v \rangle)_x = 0 , \\ \langle v \rangle_t + (p(\langle v \rangle))_x = 0 . \end{cases}$$

La forme intégrale $h(\langle v \rangle)$ est définie par la relation

$$\frac{\partial k}{\partial \langle v \rangle} = \frac{\partial \omega / \partial \langle v \rangle}{p(\langle v \rangle) - \partial \omega / \partial k} ,$$

qui est obtenue par dérivations composées à partir de (96). Grâce à la relation de dispersion, cette dernière relation se résume à

$$\frac{\partial k}{\partial \langle v \rangle} = \frac{p''(\langle v \rangle)}{3\varepsilon k} .$$

L'intégration fait apparaître une constante qui sera déterminée à la limite $k \rightarrow 0$. Finalement, dans le cas où les ondes harmoniques sont placées en aval du choc dispersif, c'est-à-dire comme dans le cas de l'équation de KdV décrit précédemment, le nombre d'onde limite k_0 sera défini par

$$(97) \quad k_0(u_-, u_+) = \left(\frac{2(p'(u_-) - p'(u_+))}{3\varepsilon} \right)^{1/2} .$$

Bien évidemment, cette relation n'est valable que dans le cas où les états u_\pm vérifient la condition d'admissibilité du choc dispersif. La vitesse harmonique est alors définie à partir de la vitesse de groupe (94) calculée en u_- et $k_0(u_-, u_+)$.

Concernant la vitesse du soliton, les choses sont plus complexes puisque la vitesse de phase (95) n'est pas valable à la limite $t \rightarrow 0$. La technique développée par El [50] consiste à considérer le soliton défini par les racines associées à un potentiel \mathscr{W} comme une onde de faible amplitude associée au potentiel $-\mathscr{W}$. Cela revient simplement à considérer le maximum local du potentiel comme le minimum local de son opposé. Il définit alors un *nombre d'onde conjugué* \tilde{k} et suit le raisonnement précédent afin d'établir la limite

$$\tilde{k}_0 = (u_-, u_+) = \left(\frac{2(p'(u_+) - p'(u_-))}{3\varepsilon} \right)^{1/2} .$$

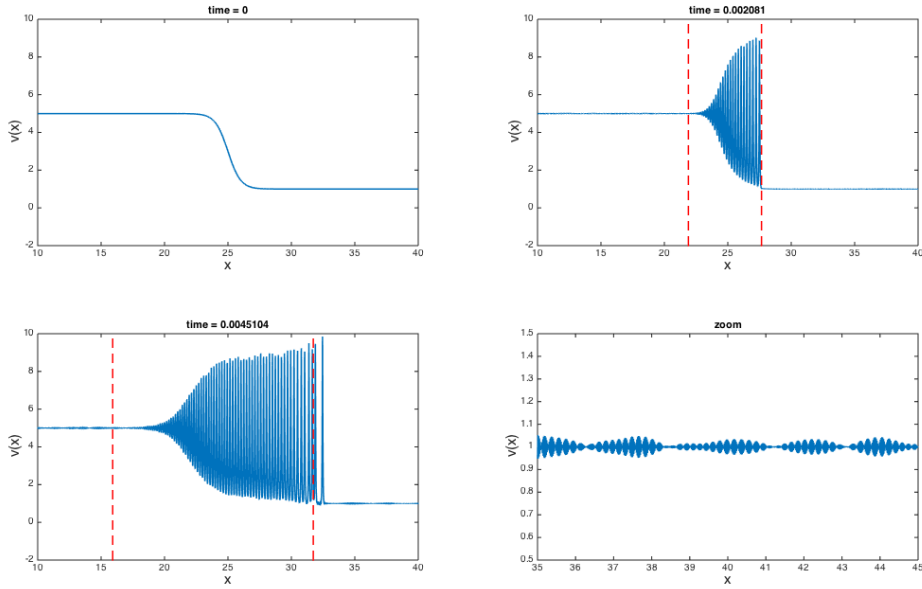


FIGURE 3.23. Évolution puis rupture de la formation d'un choc dispersif de l'équation de gKdV $\gamma = 4$ pour $\varepsilon > 0$. En rouge sont représentées les positions repérées par les vitesses s_- et s_+ . En bas à droite, zoom sur le train d'ondes observable au pied de choc.

La vitesse du soliton est alors la vitesse de phase (95) calculée en u_+ et $\tilde{k}_0 = (u_-, u_+)$, toujours dans le cas où le soliton est associé à l'état u_+ .

4.3.3. Quelques résultats numériques dans les cas $N = 1$ et $N = 2$

On commence par présenter le cas de l'équation de gKdV $\gamma = 4$. D'après notre étude de stabilité, cet exemple non intégrable s'est avéré présenter une instabilité orbitale concernant les ondes de grande période (voir figures 2.34 et 2.35). Cette instabilité se traduit par l'annulation du déterminant de la matrice $\text{Hess}\Theta$ ce qui implique que le système de Whitham n'est plus un système d'évolution quand il s'agit des ondes de grande période. Cette propriété est un obstacle majeur à l'existence même de chocs dispersifs puisque le système de Whitham ne peut alors pas représenter la gamme complète d'ondes.

Comment une condition initiale sous forme de créneau va-t-elle évoluer dans ce cas ? Existe-t-il tout de même une régularisation dispersive, qui ne serait pas représentée par des modulations ? Les résultats numériques concernant l'équation gKdV $\gamma = 4$ sont représentés sur la figure 3.23. On y distingue la formation d'une structure similaire à celle d'un choc dispersif. On rappelle que le système de Whitham décrit les modulations des ondes tant que celles-ci ne sont pas dans un voisinage du soliton. On peut donc interpréter cette structure comme celle d'un choc dispersif en formation, dans lequel les ondes de grandes périodes ne sont pas encore présentes. Néanmoins, la formation du choc dispersif se poursuit et devrait voir l'apparition d'ondes de plus en plus proches du soliton. En réalité, on observe l'apparition de trains d'ondes au pied du choc (visibles en bas à gauche et sur le zoom en bas à droite) suivi d'une explosion de la (simulation de) solution avant que celle-ci n'arrive à maturité. L'explosion numérique ne correspond pas à une vraie explosion de la solution puisque l'on sait qu'à la fois sur le tore [39] et sur \mathbb{R} [69] le problème est globalement bien posé.

On s'intéresse au cas des systèmes $N = 2$. Des développements récents de Hoefler [75] traitent de la représentation des chocs dispersifs associés au système d'Euler dispersif qui correspond à une généralisation du système d'Euler-Korteweg. Ces travaux s'appuient toujours sur la description des chocs dispersifs par les équations modulées et présentent des solutions analytiques dans le cas de l'équation complètement intégrable (NLS). La procédure qui permet de déterminer les vitesses amont et aval de la zone de Whitham dans les cas non-intégrables, décrite à la section 4.3.2, est entièrement généralisable au cas $N = 2$ et décrite dans [50].

La description des chocs dispersifs est toujours adaptée du problème de Gurevich-Pitaevskii et consiste à décrire le comportement de la solution à l'extérieur de la zone de Whitham par les équations sans dispersion tandis que l'intérieur est calculé à partir de modulations. Dans le cas des équations d'Euler dispersives, le système sans dispersion correspond au p-système qui décrit la dynamique de gaz isentropiques

$$\begin{cases} v_t = u_x, \\ u_t + (p(v))_x = 0. \end{cases}$$

La condition initiale du problème de Riemann dans le cas $N = 2$ est définie par

$$(98) \quad v(0, x) = \begin{cases} v_-, & x < 0, \\ v_+, & x > 0. \end{cases}, \quad u(0, x) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases}$$

Les courbes caractéristiques décrivent des ondes de choc et/ou des raréfactions associées aux deux composantes ainsi que leurs conditions d'admissibilité associées comme décrites par exemple dans l'ouvrage de Godlewski & Raviart [64, Chapitre I.7]. Dans le cas où p est décroissante $p' < 0$ et convexe $p'' > 0$, les courbes de détente et leurs conditions associées sont

$$\begin{aligned} \text{1-détente} \quad u(v) &= u_- + \int_{v_-}^v \sqrt{-p'(y)} dy, & v &\geq v_-, \\ \text{2-détente} \quad u(v) &= u_- + \int_v^{v_-} \sqrt{-p'(y)} dy, & v &\leq v_-. \end{aligned}$$

Les courbes de choc obtenues à partir des conditions de Rankine-Hugoniot sont

$$\text{1-choc} \quad u(v) - u_- = \begin{cases} +\sqrt{(p(v) - p(v_-))(v_- - v)}, & v \leq v_-, \\ -\sqrt{(p(v) - p(v_-))(v_- - v)}, & v \geq v_-, \end{cases}$$

avec pour condition d'admissibilité fournie par les conditions d'entropie

$$-\sqrt{-p'(v)} < \sigma_1 = -\frac{u - u_-}{v - v_-} < -\sqrt{-p'(v_-)},$$

et

$$\text{2-choc} \quad u(v) - u_- = \begin{cases} -\sqrt{(p(v) - p(v_-))(v_- - v)}, & v \leq v_-, \\ +\sqrt{(p(v) - p(v_-))(v_- - v)}, & v \geq v_-, \end{cases}$$

avec pour condition d'admissibilité

$$\sqrt{-p'(v)} < \sigma_2 = \frac{u - u_-}{v - v_-} < \sqrt{-p'(v_-)}.$$

La résolution du problème de Riemann associé à ce type de système fait donc apparaître au moins deux ondes pour chacune des coordonnées, une raréfaction et un choc reliés entre eux par un état intermédiaire constant.

Pour étudier un choc dispersif « simple », c'est-à-dire construit à partir d'une onde de détente d'un seul des champs caractéristiques, El [50] a proposé un raisonnement à rebours dans le temps. Son argument prend en compte le fait qu'au temps initial, la zone de Whitham est de largeur nulle et la totalité de la solution est alors déterminée par le système sans dispersion. C'est toujours le cas pour une solution définie à rebours et pour

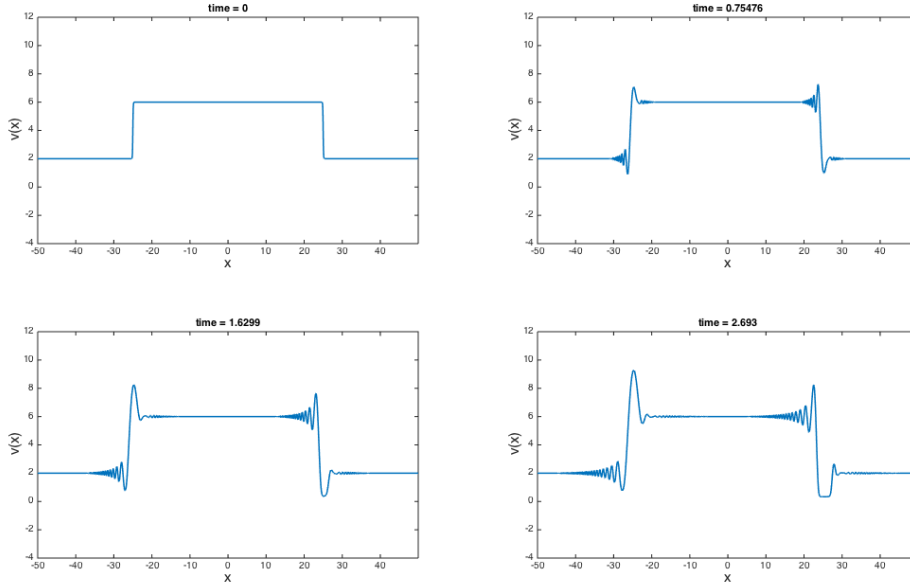


FIGURE 3.24. Évolution spatio-temporelle de chocs dispersifs et de raréfactions de la première coordonnée v du système (EK) avec $p(v) = \frac{1}{2v}$ et $\kappa = 1$.

des temps négatifs puisque cette inversion temporelle implique le calcul d'une détente admissible du p-système. Ceci permet de construire une onde de détente pour des temps décroissants comme l'unique solution du problème de Riemann considéré. L'unicité permet alors de constater que la solution pour des temps croissants et positifs sera définie par les mêmes courbes caractéristiques que celle du p-système mais pour des conditions d'admissibilité opposées. Autrement dit, un choc dispersif admissible sur une caractéristique donnée correspond à une détente non-admissible sur cette même caractéristique.

Les conditions d'admissibilité des chocs dispersifs simples sont donc

$$\begin{aligned} \text{1-choc dispersif} \quad u(v) &= u_- + \int_{v_-}^v \sqrt{-p'(y)} dy, & v_- > v, \\ \text{2-choc dispersif} \quad u(v) &= u_- + \int_v^{v_-} \sqrt{-p'(y)} dy, & v_+ > v. \end{aligned}$$

On présente sur les figures 3.24 et 3.25 la résolution de deux problèmes de Riemann pour le système d'Euler-Korteweg avec une non-linéarité $p(v) = \frac{1}{2v}$ décroissante et convexe. On entre donc dans le cadre de la description précédente. On observe bien la présence de deux ondes simples pour chacune des coordonnées du système et à chaque discontinuité. Dans tous les cas, on observe une onde de détente et un choc dispersif reliés par un état constant. L'onde de détente est située sur la droite pour les deux coordonnées, elle présente des oscillations dues à la dispersion à la manière de celles observées pour l'équation de KdV sur la figure 3.18. La différence avec le choc dispersif est l'amplitude des oscillations impliquées. Les chocs dispersifs observés sur la gauche présentent une gamme plus complète d'ondes. À mesure que la formation du choc dispersif progresse, l'amplitude du soliton amont s'approche du double de la hauteur de la marche correspondante.

Comparons ces résultats à ce que l'on peut prévoir analytiquement. On se concentre sur le problème de Riemann de droite pour lequel

$$v_- = 6, \quad v_+ = 2, \quad u_- = 5, \quad u_+ = 1.$$

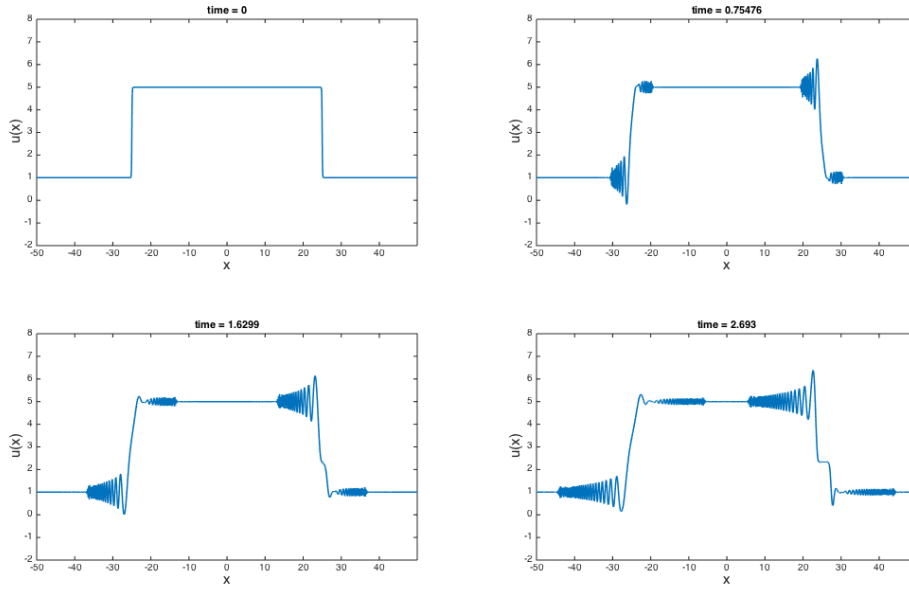


FIGURE 3.25. Évolution spatio-temporelle de chocs dispersifs et de raréfactions de la seconde coordonnée u du système (EK) avec $p(v) = \frac{1}{2v}$ et $\kappa = 1$.

On cherche à connecter les deux états \pm d'abord par un 1-choc dispersif suivi d'une 2-détente afin de déterminer l'état constant (v_m, u_m) intermédiaire que l'on voit apparaître. D'après les définitions des courbes caractéristiques et la définition de la non-linéarité $p(v) = \frac{1}{2v}$, la connexion de l'état (v_-, u_-) à (v_m, u_m) par un 1-choc dispersif se traduit par

$$u_m = u_- + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{v_m}{v_-} \right).$$

La 2-détente reliant les états (v_m, u_m) à (v_+, u_+) s'écrit

$$u_+ = u_m + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{v_m}{v_+} \right).$$

Finalement, l'état constant intermédiaire est déterminé par

$$\begin{cases} v_m = \exp \left[\frac{u_+ - u_-}{\sqrt{2}} + \frac{(\ln(v_+) + \ln(v_-))}{2} \right], \\ u_m = u_- + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{v_m}{v_-} \right). \end{cases}$$

Pour le problème de Riemann de droite que l'on considère, on trouve numériquement $v_m = 0.2$ et $u_m = 2.6$. Ces valeurs théoriques sont bien cohérentes avec les observations que l'on peut faire des deux états constants visibles sur des figures 3.24 et 3.25.

5. À propos des résultats numériques

Ce paragraphe discute des propriétés du schéma (88) et de son emploi dans le cadre de la simulation de chocs dispersifs. Sous la forme (88), le schéma n'est pas conservatif. Son expression est directement étendue de celle du schéma pour KdV de Zabusky & Kruskal [124] qui n'était elle même pas conservative. Dans leur article, ce schéma était destiné

à la simulation de données initiales régulières (un cosinus exactement) afin d'observer la formation de trains de solitons. C'est la raison pour laquelle la forme non-conservative de notre schéma étendu a fourni de nombreux résultats satisfaisants lors des simulations relatives au comportement des solutions périodiques perturbées à la section 3.

Dans le cadre de la simulation de chocs dispersifs, la forme non-conservative du schéma devient un réel problème car il ne permet pas de sélectionner les discontinuités admissibles au sens de la théorie des ÉDP hyperboliques (voir par exemple Bouchut [28, § 2.1 et 2.2]).

Bien que la structure des discontinuités que l'on souhaite simuler soit dans une certaine mesure régularisée par la dispersion, on travaille à partir d'une version conservative de ce schéma pour l'étude des chocs dispersifs. En particulier, les simulations dans le cas $N = 2$ n'ont pas pu être effectuées avec le schéma (88) mais avec une version conservative qui s'écrit dans le cas $\kappa = 1$

$$(99) \quad \begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \left(\frac{p(v_{j+1}^n) - p(v_{j-1}^n)}{2\Delta x} \right) = -\frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2\Delta x^3}. \end{cases}$$

Avec ce schéma (99), seuls des problèmes semi-linéaires peuvent être considérés.

Conclusions et perspectives

1. Problème de Cauchy pour l'équation de qKdV autour d'un profil périodique régulier

La première partie de ce manuscrit concernait l'étude du problème de Cauchy associé à l'équation de Korteweg-de Vries quasi-linéaire et définie sur la droite réelle $x \in \mathbb{R}$. Celle-ci a abouti à un théorème d'existence, d'unicité et de continuité par rapport à la donnée initiale d'une solution de cette généralisation de l'équation de KdV pour n'importe quel type de non-linéarité. Puisque la preuve ne tire parti que de la structure de l'équation qKdV et n'utilise aucune estimation de dispersion, une preuve totalement similaire fournit alors le même résultat d'existence sur le tore $\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}$.

De plus, même si notre théorème est vérifié pour des indices entiers $k \geq 4$, on pourra étendre celui-ci à des indices non-entiers en relâchant la contrainte en $k > 3 + 1/2$.

Même si le travail effectué sur ce problème de Cauchy a abouti, il ne représente finalement qu'une première étape vers l'établissement d'un théorème adapté au problème de stabilité qui nous motive. Plus précisément, notre objectif initial était d'établir un résultat d'existence autour d'une solution de l'équation qKdV bornée et régulière. Il est apparu que la technique de jauge déployée n'est pas suffisante pour ce type de problématique. Les fonctions définissant les jauges sont plus difficiles à obtenir puisqu'elles ne dépendent plus que de la solution mais aussi du profil de référence. Ces difficultés sont encore accrues lorsque la solution et le profil de référence ont des propriétés de localisation différentes.

Une perspective à ce sujet serait d'étudier le problème de Cauchy autour d'un profil périodique. La propriété de périodicité, utilisée telle que dans [109] qui établit des estimations pour les équations de Saint-Venant à coefficients périodiques, devrait rendre possible le calcul de jauges adaptées et faciliter les estimations qu'elles soulèvent.

2. Analyse du comportement asymptotique du système modulé dans les régimes limites

La seconde partie des travaux de cette thèse concernait l'exploration numérique des différents critères de stabilité. Ces travaux se basent sur le rôle majeur joué par l'intégrale d'action dans les différentes caractérisations de stabilité. L'accent a donc été mis sur cette quantité, tant d'un point de vue numérique que théorique afin d'obtenir l'information de stabilité.

Ma principale motivation a été de développer une méthode numérique performante et robuste pour une grande variété de non-linéarités. L'objectif était de pouvoir explorer les propriétés de toute une famille d'ondes périodiques pour une classe de systèmes d'une ou deux équations. Par ailleurs, l'ensemble des codes numériques conçus pendant cette thèse sera bientôt disponible sur le site du projet ANR BoND.

D'un point de vue technique, la répétition en grand nombre des opérations présentées dans la discussion du chapitre 4, section 6.2 a demandé de grandes précautions dans

l'implémentation, notamment au niveau des opérations de base comme les quadratures numériques.

Les premiers résultats numériques ont révélé de nombreuses propriétés de la matrice du système de Whitham que l'on a noté \mathbf{D} (26) ci-dessus. On pense notamment à la perte d'hyperbolicité stricte du système de Whitham dans les deux régimes extrêmes et au comportement asymptotique de la matrice $\text{Hess}\Theta$ associé. Les résultats obtenus avec notre méthode basée sur le calcul de cette matrice hessienne de l'action ont permis d'obtenir de nombreuses informations de stabilité, comme peut l'illustrer la table 2.4, et il reste encore de nombreuses équations ou non-linéarités à explorer. Notre méthode s'est avérée inadéquate pour l'étude de la limite soliton pour différentes équations, voir la discussion au chapitre 4, section 6.2. Néanmoins, on fait une analyse asymptotique dans [18] qui permet d'atteindre les comportements difficiles à observer numériquement.

Les coordonnées (k, α, \mathbf{M}) que nous introduisons sont particulièrement bien adaptées à l'exploration du problème de Gurevich & Pitaevskii. Le nombre d'onde tend vers 0 dans la limite soliton et possède une limite finie dans la limite faible amplitude. L'inverse se produit pour la quantité α qui tend vers 0 dans la limite harmonique où l'amplitude de l'onde tend vers 0 et possède une limite finie dans le régime soliton. La moyenne \mathbf{M} a une limite finie dans les deux cas. La formulation et l'étude du système de Whitham dans ces coordonnées fait l'objet d'un article en cours de finalisation [18] où l'on obtient en outre le comportement asymptotique de la matrice $\text{Hess}\Theta$ dans les deux régimes limites, ce qui permet de justifier complètement la formulation du système modulé dans ce nouveau jeu de coordonnées

$$\begin{cases} \partial_T k & - & \partial_X (\partial_\alpha \mathbf{H}) & = & 0, \\ \partial_T \alpha & - & \partial_X (\partial_k \mathbf{H}) & = & 0, \\ \partial_T \mathbf{M} & - & \partial_X (\mathbf{B} \nabla_{\mathbf{M}} \mathbf{H}) & = & 0, \end{cases}$$

où le hamiltonien moyenné \mathbf{H} est défini comme la moyenne spatiale du hamiltonien \mathcal{H}

$$\mathbf{H}[\mathbf{U}] = \langle \mathcal{H}[\mathbf{U}] \rangle = \frac{1}{\Xi} \int_0^\Xi \mathcal{H}[\mathbf{U}] dx,$$

et lié à l'intégrale d'action Θ par la relation

$$\Theta = \Xi \mathbf{H} + c \partial_c \Theta + \boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Theta + \mu \partial_\mu \Theta.$$

Si la stricte convexité du hamiltonien moyenné $\mathbf{H}(k, \alpha, \mathbf{M})$ est une condition suffisante d'hyperbolicité du système de Whitham, cette propriété ne peut pas être vraie dans les régimes limites. En effet, on a les relations sur les dérivées suivantes

$$\partial_\alpha \mathbf{H} = -k c, \quad \partial_k \mathbf{H} = \Theta - \alpha c,$$

qui démontrent que $\partial_\alpha \mathbf{H} \rightarrow 0$ dans la limite soliton $k \rightarrow 0$ et $\partial_k \mathbf{H} \rightarrow 0$ dans la limite harmonique $\alpha \rightarrow 0$ (pour laquelle $\Theta \rightarrow 0$ également).

Ces propriétés du système de Whitham sont peu connues pour des non-linéarités plus générales et la description des équations modulées en coordonnées (k, α, \mathbf{M}) devrait nous permettre de faire des avancées sur l'analyse du problème de Gurevich-Pitaevskii.

3. Construction de chocs dispersifs pour des systèmes non intégrables.

La description des chocs dispersifs d'équations non-intégrables motive fortement l'emploi des coordonnées (k, α, \mathbf{M}) pour l'écriture des équations modulées. La compréhension de la structure de ces chocs était l'objectif des travaux présentés dans la troisième et dernière partie de ce manuscrit. Nos premiers résultats concernent l'équation de KdV et plus

particulièrement la comparaison entre la simulation directe et les solutions analytiques du problème de Gurevich-Pitaevskii. La résolution de ce problème consiste à déterminer une solution auto-similaire des équations de Whitham dont les ondes modulées associées représentent la zone oscillante du choc dispersif et dont les paramètres macroscopiques (amplitude, période) sont compatibles avec la solution du problème sans dispersion qui régit l'extérieur du choc.

C'est une généralisation de ce problème dans les cas non-intégrables qui nous intéresse. La représentation des modulations de la zone oscillante du choc par une détente des équations modulées exige que celles-ci soient hyperboliques et vraiment non-linéaires. L'étude de ces propriétés dans les cas non-intégrables est précisément l'objet de la formulation du système de Whitham en coordonnées (k, α, \mathbf{M}) décrite ci-dessus.

Concernant les équations non-intégrables, El, Hofer & Shearer [50, 53] ont introduit une méthode d'analyse des vitesses d'expansion de la zone oscillante. Cette technique basée sur l'emploi d'un nombre d'onde conjugué \tilde{k} est présentée dans le dernier chapitre de ce manuscrit. Les deux coordonnées α et \tilde{k} remplissent le même type de rôle. Elles possèdent une limite finie dans la limite soliton et tendent vers 0 dans la limite harmonique. Leur introduction suit le même objectif qui est de symétriser l'étude des deux limites afin de simplifier l'approche du soliton. En perspective, la coordonnée α pourra certainement représenter une alternative au nombre d'onde conjugué dans l'analyse de la limite soliton.

Co-periodic stability of periodic waves in some Hamiltonian PDEs

Cette annexe est une reproduction de *Co-periodic stability of periodic waves in some Hamiltonian PDEs* [20], écrit en collaboration avec S. Benzoni-Gavage et L. M. Rodrigues et paru à *Nonlinearity*, 29(11) :3241, 2016. On rappelle la divergence de notation concernant le paramètre λ , défini avec un signe négatif par (12) et avec un signe positif dans ce qui suit (105).

Abstract

The stability of periodic traveling wave solutions to dispersive PDEs with respect to ‘arbitrary’ perturbations is still widely open. The focus is put here on stability with respect to perturbations of the same period as the wave, for KdV-like systems of one-dimensional Hamiltonian PDEs. Stability criteria are derived and investigated first in a general abstract framework, and then applied to three basic examples that are very closely related, and ubiquitous in mathematical physics, namely, a quasilinear version of the generalized Korteweg–de Vries equation (qKdV), and the Euler–Korteweg system in both Eulerian coordinates (EKE) and in mass Lagrangian coordinates (EKL). Those criteria consist of a necessary condition for spectral stability, and of a sufficient condition for orbital stability. Both are expressed in terms of a single function, the abbreviated action integral along the orbits of waves in the phase plane, which is the counterpart of the solitary waves moment of instability introduced by Boussinesq. Regarding solitary waves, the celebrated Grillakis–Shatah–Strauss stability criteria amount to looking for the sign of the second derivative of the moment of instability with respect to the wave speed. For periodic waves, the most striking results obtained here can be summarized as : an odd value for the difference between N – the size of the PDE system – and the negative signature of the Hessian of the action implies spectral instability, whereas a negative signature of the same Hessian being equal to N implies orbital stability. Since these stability criteria are merely encoded by the negative signature of matrices, they can at least be checked numerically. Various numerical experiments are presented, which clearly discriminate between stable cases and unstable cases for (qKdV), (EKE) and (EKL).

1. Introduction

Hamiltonian PDEs include a number of model equations in mathematical physics, like the (generalized) Korteweg-de Vries equation (KdV) or the Non-Linear Schrödinger equation (NLS). These equations and many others are known to admit rich families of planar traveling wave solutions, with more or less degrees of freedom. The most ‘rigid’ traveling waves are the so-called *kinks*, corresponding to heteroclinic orbits of the ODEs governing their profiles. *Periodic* traveling waves, which are the purpose of this paper, have the highest number of degrees of freedom. In between kinks and periodic waves in terms of degrees of freedom, we can find *solitary* waves, corresponding to homoclinic orbits.

The actual existence of such waves follows from the Hamiltonian structure of the governing ODEs. We are most interested in their nonlinear stability, even though we can only hope for *orbital* stability, because of *translation invariance*. The most efficient approach to tackle the orbital stability of Hamiltonian traveling waves has been known as the Grillakis–Shatah–Strauss (GSS) theory [67], which provides a way of using a *constrained energy* as a Lyapunov function. This method crucially relies on the conservation of a quantity associated with translation invariance, termed ‘*impulse*’ by Benjamin [10], and known as the *momentum* in the NLS literature. For solitary waves, the GSS theory provides a sufficient stability condition in terms of the convexity of the constrained energy as a function of the wave velocity. This constrained energy happens to correspond to what was called ‘*moment of instability*’ by Boussinesq [30] more than 140 years ago. Resurrected by Benjamin [9] in the early ’70s, the ideas of Boussinesq have been made rigorous for many types of solitary waves in [67, 25, 23, 17] (see also [14], [41] and references in [5]). Together with the Evans functions techniques brought in by Pego and Weinstein [104], Kapitula and Sandstede [85], and many others, those pieces of work have led to a clear picture of which solitary waves are stable and which are not.

By contrast, the theory is much less advanced regarding periodic waves. Apart from the higher number of degrees of freedom, the main difficulty comes from the fact that the nice variational framework set up by Grillakis, Shatah, and Strauss does not work for all kinds of perturbations of those waves. As a matter of fact, the theory of *linear* stability of periodic waves under ‘localized’ perturbations — that is, perturbations going to zero at infinity — is still in its infancy (see for instance [26, 56, 27] as regards spectral stability for KdV and the cubic NLS, and [108] for asymptotic linear stability of KdV waves), and the nonlinear stability under such perturbations is an open problem. In [22, 21], the authors have contributed to the field by exhibiting several necessary conditions for the spectral stability of periodic waves in Hamiltonian PDEs. In particular, they have proved in a rather general setting that the hyperbolicity of the modulated equations ‘à la Whitham’ is necessary for the spectral stability of the underlying wave. More precisely, the existence of a nonreal eigenvalue for the modulated equations implies a *sideband instability*, which means that there are unstable modes for arbitrary small nonzero Floquet exponents. We shall not enter into details about these results here, we refer the reader to [21] and references therein — see also the recent related analysis in [81].

We are going to concentrate on the somehow easier problem of stability with respect to *co-periodic* perturbations, that is, perturbations of the same period as the wave (or equivalently, corresponding to a zero Floquet exponent). Our aim is to give as a clear picture as in the case of solitary waves, which by the way may be viewed as a limiting case of periodic waves — by letting their wavelength go to infinity. The great advantage of co-periodic perturbations is that they allow us to use the GSS approach in the simplest manner — by using basically only one additional conservation law (or constraint) to rule out the ‘bad’ directions from the variational framework —, and thus achieve *nonlinear* stability results at once¹. This has been done for the cubic NLS by Gally and Haragus [55] — see also [27, 57] for more recent results, dealing with *subharmonic* perturbations, of which the period is a multiple of the period of the wave —, and for the generalized KdV (gKdV) by Johnson [77] — for the classical or the modified KdV, see also [6], [4, 8] for co-periodic, orbital stability and [43], [44] for a more general result, which even handles subharmonic perturbations. Both NLS and gKdV can be viewed as specific cases of the abstract setting we are going to consider. Furthermore, this setting is built to include the Euler–Korteweg system, a fairly general model that is involved in various applications (superfluids, water waves, incompressible fluid dynamics, and nonlinear optics). The abstract systems we consider hold in one space dimension, and read

$$(100) \quad \partial_t \mathbf{U} = \mathcal{J}(\mathbf{E}\mathcal{H}[\mathbf{U}]),$$

where the unknown \mathbf{U} takes values in \mathbb{R}^N , \mathcal{J} is a skew-adjoint differential operator, and $\mathbf{E}\mathcal{H}$ denotes the variational derivative of $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)$. In practice, we are most concerned with the case $N = 2$, which is the case for the various forms of the Euler–Korteweg system, as well as NLS. In fact, (100) includes both the original formulation of NLS, with

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

merely being the skew-symmetric matrix of Hamiltonian equations in ‘canonical’ coordinates, and its fluid formulation via the Madelung transform. In the latter case,

$$\mathcal{J} = \mathbf{B}\partial_x \text{ with } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Even in the simplest context of co-periodic stability, it is indeed still much unclear how spectral stability can imply nonlinear stability in Hamiltonian frameworks. Concerning localized perturbations we even lack a clear notion of *dispersive spectral stability* that would be the analogue of *diffusive spectral stability* [111, 112, 79, 78, 107].

From now on, we assume that $\mathcal{J} = \mathbf{B}\partial_x$ with \mathbf{B} a *symmetric* and *nonsingular* matrix. This allows the case $N = 1$ with $\mathcal{J} = \partial_x$, which includes gKdV, and will enable us to make the connection with earlier results by Bronski, Johnson, and Kapitula. Furthermore, if $N = 2$, we assume that the Hamiltonian \mathcal{H} splits as

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}[\mathbf{U}] = \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) = \mathcal{I}(v, u) + \mathcal{E}(v, v_x), \text{ with } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix},$$

and then that

$$\mathbf{B}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline b & 0 \end{array} \right), \quad b \neq 0.$$

Here above and throughout the paper, square brackets $[\cdot]$ signal a function of not only the dependent variable \mathbf{U} but also of its derivatives $\mathbf{U}_x, \mathbf{U}_{xx}, \dots$. In this way, the abstract system in (100) reads as a system of conservation laws

$$(101) \quad \partial_t \mathbf{U} = \partial_x (\mathbf{B} \mathbf{E} \mathcal{H}[\mathbf{U}]).$$

We recall that, when, as in cases under consideration in the present paper, \mathcal{H} depends only on \mathbf{U} and \mathbf{U}_x , the α -th component ($1 \leq \alpha \leq N$) of the variational derivative $\mathbf{E} \mathcal{H}[\mathbf{U}]$ is

$$(\mathbf{E} \mathcal{H}[\mathbf{U}])_\alpha := \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_\alpha}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) - D_x \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha,x}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) \right),$$

where D_x stands for the *total* derivative, so that

$$D_x \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha,x}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) \right) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)}{\partial U_\beta \partial U_{\alpha,x}} U_{\beta,x} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)}{\partial U_{\beta,x} \partial U_{\alpha,x}} U_{\beta,xx},$$

where we have used Einstein's convention of summation over repeated indices. The main examples that fit the abstract framework in (101) are, besides the generalized Korteweg-de Vries equation

$$(gKdV) \quad \partial_t v + \partial_x p(v) = -\partial_x^3 v,$$

and its quasilinear counterpart which is written in the more general form

$$(qKdV) \quad \partial_t v = \partial_x (\mathbf{E} e[v]), \quad e = e(v, v_x),$$

the Euler–Korteweg system in Eulerian coordinates,

$$(EKE) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x (\mathbf{E} \mathcal{E}[\rho]) = 0, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \rho_x), \end{cases}$$

or in mass Lagrangian coordinates,

$$(EKL) \quad \begin{cases} \partial_s v = \partial_y u, \\ \partial_s u = \partial_y (\mathbf{E} e[v]), \quad e = e(v, v_y). \end{cases}$$

We invite the reader to take a look at [21] for more details.

The main results of the present paper are concerned with periodic traveling wave solutions to (101), with applications to (qKdV), (EKE) and (EKL). They consist of a sufficient condition for their orbital, co-periodic stability, and a necessary condition for their spectral, co-periodic stability. Both are expressed in terms of the Hessian of the *constrained energy* — to be defined in Section 2 hereafter — viewed as a function of the $N + 2$ parameters determining periodic waves. The value of this constrained energy at a given wave profile happens to be interpreted as an *abbreviated action* integral along the corresponding orbit in the phase plane $\{(v, v_x)\}$. Remarkably enough, as far as capillary fluids are concerned, that is for the systems (EKE) and (EKL) with an energy of the form

$$(102) \quad \mathcal{E} = F(\rho) + \frac{1}{2} \mathcal{K}(\rho) \rho_x^2, \quad e = f(v) + \frac{1}{2} \kappa(v) v_y^2,$$

the action integral physically corresponds to *surface tension*. The abbreviated action of periodic wave profiles also admits an interpretation in terms of the averaged equations for modulated wavetrains, in that it is dual to the wavenumber in the generalized Gibbs relation satisfied by the averaged energy (see Eqs (63)(64) in [22]) — this point of view is investigated further in a forthcoming paper.

Co-periodic stability conditions are replacements for the — simpler — ones known for solitary waves. Indeed, while the abbreviated action depends on $N + 2$ parameters for periodic waves, it depends on the sole solitary wave velocity once the endstate of solitary waves is fixed in \mathbb{R}^N , in which case the abbreviated action merely coincides with the Boussinesq moment of instability.

As is often the case, the necessary condition for spectral stability comes from an *Evans function* calculation, see Section 3. Phrased explicitly, it yields a sufficient condition for spectral instability, which is that the difference between N and the negative signature of the Hessian of the abbreviated action be odd.

As to the sufficient condition for orbital stability, it relies on the GSS approach, together with a crucial algebraic relation, analogous to what has been pointed in [105] (see also [84, Proposition 5.3.1] and references therein). This relation makes the connection between the negative signatures of two sorts of Hessians associated with the constrained energy, namely, the differential operator obtained as the Hessian at the wave’s profile of the constrained energy viewed as a functional, and the $(N + 1) \times (N + 1)$ matrix, corresponding to what Kapitula and Promislow [84] call a *constraint matrix*, and arising here as the Hessian of the abbreviated action integral under the constraint that the period of waves is fixed. This leads us to introduce a most important *orbital stability index*. All this is made more precise in Section 2 below, and those necessary/sufficient stability criteria are actually derived in an abstract setting in Sections 3 and 4.

Section 5 is then devoted to the application of these abstract results to (qKdV), (EKL), and (EKE), with energies as in (102). In all these cases, our sufficient condition for orbital stability turns out to rely on the simple requirement that the negative signature of the Hessian of the abbreviated action be equal to N .

In addition, we point out a close connexion between stability criteria for (qKdV) and for the Euler–Korteweg systems (EKL) and (EKE). We show in Section 5.2 that the systems (EKL) and (EKE) share the very same abbreviated action integral and constrained energy, in which the parameters of the waves turn out to be pairwise exchanged — as well as the constraints actually, if the period itself is considered as a constraint. This readily implies that our spectral stability criterion coincides for these systems. Furthermore, we prove that (EKE) and (EKL) actually have the same orbital stability index, equal to the negative signature of the Hessian of the abbreviated action minus two, even though the negative signatures of the unconstrained variational Hessians of respective Lagrangians can differ from each other. Regarding spectral stability with respect to ‘arbitrary’ perturbations — and not only co-periodic perturbations — we even show that the differential operators involved in the linearized systems associated with (EKE) and (EKL) are *isospectral*. Even though this seems a very natural result, the underlying conjugacy between eigenfunctions is far from being trivial. Moreover, we stress that the spectral conjugacy is not restricted to co-periodic boundary conditions and respects the Floquet exponent by Floquet exponent Bloch-wave decomposition. Both spectral and variational connections are pointed out here for the first time, up to the authors’ knowledge.

Some more specific examples — dictated by more or less classical choices of nonlinearities — are then investigated numerically in Section 5. This part relies very much on the fact that all our stability criteria are expressed in terms of the abbreviated action integral, which can be computed in the phase plane without any need of an ODE solver. Its derivatives are then computed by means of finite differences. The coexistence of two grids of discretization — one for the integral and one for finite differences, and the high

condition number of the Hessian matrices that are to be computed, induce some numerical difficulties that have been coped with by a suitable choice of mesh sizes. Numerous numerical experiments have been conducted, and their results are in accordance with those that can be computed analytically. In particular, our routine for computing the Hessian of the abbreviated action integral enables us to recover in a very precise way — and up to the small amplitude limit and to the soliton limit — the eigenvalues of modulated equations associated with some well-known completely integrable PDEs (namely, KdV, mKdV, and cubic NLS), as displayed in a forthcoming paper [18].

Coming back to the analytical part of our results, let us mention the following, important difficulty. In order to actually prove some orbital stability, we need a suitable local well-posedness theory for the Cauchy problem. This kind of result is of course heavily model-dependent. If there is for instance a huge literature on (g)KdV, it does not seem that anyone ever looked at the Cauchy problem for (q)KdV when the ‘capillarity’ factor \cap in

$$e = f(v) + \frac{1}{2} \cap (v) v_x^2$$

is not constant. This is done in a forthcoming paper [96]. Regarding (EKE) and (EKL), still with energies as in (102) with variable \cap and \cap , what we need is a basic adaptation to the 1D torus of earlier results dealing with the Cauchy problem on the whole real line [15, 16].

2. Summary of main results

In order to define the constrained energy, we observe that the system (101) formally admits the additional conservation law

$$(103) \quad \partial_t \mathcal{Q}(\mathbf{U}) = \partial_x (\mathcal{S}[\mathbf{U}])$$

with

$$\mathcal{Q}(\mathbf{U}) := \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{U}, \quad \mathcal{S}[\mathbf{U}] := \mathbf{U} \cdot \mathbf{E} \mathcal{H}[\mathbf{U}] + \mathbf{L} \mathcal{H}[\mathbf{U}],$$

$$\mathbf{L} \mathcal{H}[\mathbf{U}] := U_{\alpha,x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_{\alpha,x}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) - \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x).$$

The dots \cdot in the definitions of \mathcal{Q} and \mathcal{S} are for the ‘canonical’ inner product $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = U_\alpha V_\alpha$ in \mathbb{R}^N . Recall that \mathbf{E} stands for a variational derivative. As to the sans-serif letter \mathbf{L} , it stands for a crude version — without any change of variables involved — of the ‘Legendre transform’, just defined by the formula above. We see that \mathcal{Q} is associated with the invariance of (101) with respect to x -translations because of the algebraic relation

$$(104) \quad \partial_x \mathbf{U} = \partial_x (\mathbf{B} \mathbf{E} \mathcal{Q}[\mathbf{U}]).$$

As a consequence, for a travelling wave $\mathbf{U} = \underline{\mathbf{U}}(x - ct)$ of speed c to be solution to (101), one must have by (104) that

$$\partial_x (\mathbf{E}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}]) = 0,$$

or equivalently, there must exist $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N$ such that

$$(105) \quad \mathbf{E}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}] = \boldsymbol{\lambda}.$$

Equation (105) is the *Euler–Lagrange equation* associated with the *Lagrangian*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x; \boldsymbol{\lambda}, c) := \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) + c\mathcal{Q}(\mathbf{U}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{U}.$$

From place to place we shall refer to the components of $\boldsymbol{\lambda}$ as *Lagrange multipliers*. We thus see that $\mathbb{L}\mathcal{L}$ is a first integral of the profile ODEs in (105). We also notice that (105) implies

$$\mathbb{L}\mathcal{L}[\mathbf{U}] = \mathcal{I}[\mathbf{U}] + c\mathcal{Q}(\mathbf{U}),$$

which is of course consistent with the conservation law in (103). In this way, the possible profiles $\underline{\mathbf{U}}$ are determined by the equations in (105) together with

$$(106) \quad \mathbb{L}\mathcal{L}[\underline{\mathbf{U}}] = \mu,$$

where μ is a constant of integration, which we shall sometimes refer to as an *energy level*, since $\mathbb{L}\mathcal{L}$ is the conserved ‘energy’ associated with the Lagrangian $\mathcal{L}\mathcal{L}$.

All this roughly shows that a periodic travelling profile $\underline{\mathbf{U}}$ is ‘generically’ parametrized by $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \mathbb{R}^{N+2}$. Furthermore, if such a profile $\underline{\mathbf{U}}$ is of period Ξ , we can define the constrained energy of all Ξ -periodic, smooth enough functions \mathbf{U} by

$$\mathcal{F}[\mathbf{U}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] := \int_0^\Xi (\mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) + c\mathcal{Q}(\mathbf{U}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{U} + \mu) dx.$$

Denoting by

$$(107) \quad \Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) := \mathcal{F}[\underline{\mathbf{U}}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] = \int_0^\Xi (\mathcal{E}(v, v_x) + \mathcal{I}(v, \underline{v}) + c\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \mu) dx,$$

we can see by using (106) and a straightforward change of variable that

$$(108) \quad \Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \oint \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_x}(v, v_x) dv$$

is the *abbreviated action* of \mathcal{E} along the orbit described by \underline{v} in the (v, v_x) -plane. This is the reason why, as was observed in [21, Proposition 1], the partial derivatives of Θ are merely given by

$$(109) \quad \Theta_\mu = \Xi, \quad \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Theta = - \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx, \quad \Theta_c = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx.$$

We can now state our stability conditions in a more precise way. Necessary condition for spectral, co-periodic stability. A periodic traveling wave solution to (100), of profile $\underline{\mathbf{U}}$ and period Ξ , is said spectrally stable with respect to co-periodic perturbations if the spectrum of the linearized operator

$$\mathcal{A} := \mathcal{J} \text{Hess}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}]$$

in $L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ is purely imaginary. We cannot expect more than this neutral stability, because of symmetries². A necessary condition for spectral, co-periodic stability is

- $\det(\text{Hess}\Theta) \leq 0$ in the case $N = 1$,
- $\det(\text{Hess}\Theta) \geq 0$ in the case $N = 2$.

The scalar case $N = 1$ is a generalization to quasilinear equations of the results found by Bronski and Johnson [32]. For both cases, the proof is based on the fact that possible unstable eigenvalues z are characterized by $D(z) = 0$, with

$$D(z) := \det(\mathbf{F}(\Xi; z) - \mathbf{F}(0; z))$$

where $\mathbf{F}(\cdot; z)$ denotes the fundamental solution of the ODEs in $\mathcal{A}\mathbf{U} = z\mathbf{U}$, and on asymptotic expansions showing that when r is real

$$D(r) \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} (-r)^{N+2} |\det(\mathbf{B}^{-1})| \det(\text{Hess}\Theta) + o(r^{N+2}) \quad \text{and} \quad D(r) > 0 \text{ for } r \gg 1.$$

These results are collected in a rigorous manner in Theorem A.1 (for $N = 2$) and Theorem A.2 (for $N = 1$) in Section 3.

2. The eigenvalues of \mathcal{A} outside real and imaginary axes arise as quadruplets $(z, \bar{z}, -z, -\bar{z})$, nonzero real or imaginary eigenvalues come in pairs $(z, -z)$.

Sufficient condition for orbital, co-periodic stability. It is obtained through a variational argument. We assume that $\Xi_\mu = \Theta_{\mu\mu} \neq 0$, and define the *constraint matrix* as

$$\mathbf{C} := \frac{\check{\nabla}\Theta_\mu \otimes \check{\nabla}\Theta_\mu}{\Theta_{\mu\mu}} - \check{\nabla}^2\Theta,$$

with $\check{\nabla}$ being a shortcut for the gradient with respect to $(\boldsymbol{\lambda}, c)$ at fixed μ . (Note that the coefficients of \mathbf{C} are made, up to a factor $-1/\Theta_{\mu\mu}$, of all the 2×2 minors of $\check{\nabla}^2\Theta$ containing $\Theta_{\mu\mu}$.) Let us denote by \mathbf{A} the differential operator obtained as the Hessian of the constrained Hamiltonian :

$$\mathbf{A} := \text{Hess}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}].$$

If \mathbf{C} is nonsingular, and if the *negative signatures* of the operator \mathbf{A} and of the matrix \mathbf{C} happen to coincide, then the periodic travelling wave solutions to (101) of profile $\underline{\mathbf{U}}$ are orbitally stable in $L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$. This is the purpose of Theorem A.6 in Section 4. Its proof is based on the following algebraic relation, which generalizes a well-known fact for finite dimensional operators [74] and is shown in [21] (see also [105], [84, Proposition 5.3.1] for similar observations),

$$\mathfrak{n}(\mathbf{A}) = \mathfrak{n}(\mathbf{A}|_{T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C}}) + \mathfrak{n}(\mathbf{C}),$$

where \mathfrak{n} denotes negative signature, and $T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C}$ is the *tangent subspace* to the $(N + 1)$ codimensional manifold

$$\mathcal{C} := \{\underline{\mathbf{U}} \in L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}); \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx, \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx = \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx\}.$$

(The space $T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C}$ actually corresponds to what Kapitula and Promislow [84] call an *admissible space*.) According to that relation between negative signatures, the fact that $\mathfrak{n}(\mathbf{A}) = \mathfrak{n}(\mathbf{C})$ implies that the operator $\mathbf{A}|_{T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C}}$ is nonnegative, and up to factoring out the null direction $\underline{\mathbf{U}}_x$, this roughly shows that the functional $\mathcal{F}[\cdot; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c]$ has a local minimum at $\underline{\mathbf{U}}$ and its translates $\underline{\mathbf{U}}(\cdot + s)$ on

$$\mathcal{C} := \{\underline{\mathbf{U}} \in L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}); \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx, \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx = \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx\}.$$

Orbital stability can then be achieved by a contradiction argument as in [25, 67], see [21], or in a direct way as in [77, 56] (see also [41, §4.2 & §7.3] for an interesting discussion of the pros and cons of these arguments). We choose the direct way for the proof of Theorem A.6 in Section 4.

In practice, we need to evaluate the *orbital stability index* $\mathfrak{n}(\mathbf{A}) - \mathfrak{n}(\mathbf{C})$. For the ‘concrete’ systems we consider in Section 5, we can infer from a Sturm–Liouville argument that $\mathfrak{n}(\mathbf{A}) \in \{1, 2\}$. In particular, extending results by Johnson [77] for (gKV), we show that $\Theta_{\mu\mu} > 0$ implies $\mathfrak{n}(\mathbf{A}) = 1$. Furthermore, we see that when $N = 1$, $\Theta_{\mu\mu} \det(\mathbf{C}) = \det(\text{Hess}\Theta)$. Hence a more explicit — but partial — version of the sufficient stability condition :

$$\Theta_{\mu\mu} > 0, \det(\text{Hess}\Theta) < 0,$$

which ensures indeed that $\mathfrak{n}(\mathbf{A}) = \mathfrak{n}(\mathbf{C})$, and is of course consistent with Johnson’s findings in the semilinear case. In fact, we recover in Section 5.1 the more general sufficient condition for $\mathfrak{n}(\mathbf{A}) = \mathfrak{n}(\mathbf{C})$ in (gKdV) that was later derived by Bronski, Johnson and Kapitula [33] — using in particular that $\Theta_{\mu\mu} < 0$ implies $\mathfrak{n}(\mathbf{A}) = 2$ —, namely

$$\Theta_{\mu\mu} \neq 0, \begin{vmatrix} \Theta_{\lambda\lambda} & \Theta_{\mu\lambda} \\ \Theta_{\lambda\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{vmatrix} \neq 0, \det(\text{Hess}\Theta) \neq 0, \quad \mathfrak{n}(\text{Hess}\Theta) = 1.$$

More generally, for our concrete systems, we prove by related arguments — Sturm–Liouville theory (see Lemma A.15) and simple algebraic relations (see Proposition A.11) —

that the orbital stability index is merely given by

$$\mathfrak{n}(\mathbf{A}) - \mathfrak{n}(\mathbf{C}) = \mathfrak{n}(\text{Hess}\Theta) - N.$$

Therefore, our nonlinear stability result applies as soon as $\Theta_{\mu\mu} \neq 0$, $\det(\text{Hess}\Theta) \neq 0$ and

$$n(\text{Hess}\Theta) = N.$$

Our approach is applied to (qKdV) in Section 5.1, Theorem A.14.

Details regarding the systems which have motivated this work, (EKL) and (EKE), are given in Section 5.2. A most important fact is that these systems share the very same abbreviated action, $\Theta(\mu, \lambda, j, \sigma)$ defined in (134), where σ is the speed of EKE waves, j is the ‘speed’³ of EKL waves, and the roles of the parameters μ and λ are exchanged when we go from (EKL) to (EKE) and vice versa : μ is an *energy level* for EKE waves and a *Lagrange multiplier* for EKL waves, λ is a Lagrange multiplier for EKE waves and an energy level for EKL waves⁴. As a consequence, the stability criteria which are expressed only in terms of $\det(\text{Hess}\Theta)$ and $n(\text{Hess}\Theta)$ coincide for corresponding EKE waves and EKL waves. By contrast, the individual negative signatures $n(\mathbf{A})$ and $n(\mathbf{C})$ are in general not preserved by going from one formulation to the other. This explains why some simplified, partial criteria — analogous to those in [77] for (gKdV) for instance — are actually formulation-dependent.

The fact that waves should be simultaneously stable in both formulations seems very natural from a physical point of view. However, this is not that obvious to prove mathematically, because the mass Lagrangian coordinates are obtained from the Eulerian coordinates through a nonlinear and nonlocal change of variables that depends on the solution itself.

As far as spectral stability is concerned, and not only co-periodic stability actually, we prove in Theorem A.17 (also see Remark A.17) that the corresponding linearized operators are indeed *isospectral*. The proof is quite simple once we reformulate the nonlinear problems in a suitable way, but it reveals that the kind of conjugacy between those operators is not trivial. We are not aware of any earlier result of this type.

As regards the co-periodic orbital stability, its simultaneous occurrence in both formulations (EKL) and (EKE) is supported by the idea that corresponding EKE waves and EKL waves share the same constrained functional $\mathcal{F}[\cdot; \mu, \lambda, j, \sigma]$, and that the constraints are preserved by passing from Eulerian coordinates to mass Lagrangian coordinates⁵. If the vanishing of our orbital stability index were exactly equivalent to the fact that the functional $\mathcal{F}[\cdot; \mu, \lambda, j, \sigma]$ has a local minimum on the constrained manifold \mathcal{C} at the wave profile and its translates, this would show the equivalence of co-periodic orbital stability for (EKL) and (EKE). We find out that the issue is a little more subtle by looking at our abstract result, Theorem A.6. Recalling that the roles of the ‘concrete’ parameters μ and λ are exchanged when we go from (EKE) to (EKL), we see that the main assumptions for applying Theorem A.6 to (EKE) and (EKL) are,

$$\Theta_{\mu\mu} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) \neq 0, \quad n(\text{Hess}\Theta) = 2,$$

for the former (see Theorem A.24), and

$$\Theta_{\lambda\lambda} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) \neq 0, \quad n(\text{Hess}\Theta) = 2$$

for the latter (see Theorem A.23). The slight discrepancy between these two sets of conditions obviously comes from the derivatives $\Theta_{\mu\mu}$ and $\Theta_{\lambda\lambda}$, which correspond respectively to the derivative with respect to μ of the wave period in Eulerian coordinates — μ being the energy level in these coordinates — and the derivative with respect to λ of the wave

3. We use some quotes here because this is not a speed from the physical point of view, it actually corresponds to a mass transfer flux across the corresponding EKE waves.

4. To avoid the introduction of too many notations, we have chosen to use the greek letters μ and λ with a meaning in the ‘concrete’ examples (EKL) and (EKE) that is slightly different from their meaning in the abstract framework, see Table A.2.

5. In fact, this is true provided that we also consider the period as a constraint, and thus prescribe the $(N + 2)$ constraints $\int_0^{\Xi} dx = \Xi$, $\int_0^{\Xi} \mathbf{U}(x)dx = \int_0^{\Xi} \underline{\mathbf{U}}(x)dx$, $\int_0^{\Xi} \mathcal{Q}(\mathbf{U}(x))dx = \int_0^{\Xi} \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}(x))dx$.

period in mass Lagrangian coordinates — λ being the energy level in these coordinates. They are not a priori related to each other. However, as long as we regard the vanishing of either $\Theta_{\mu\mu}$ or $\Theta_{\lambda\lambda}$ as anomalous transitions, we can indeed think of the periodic waves as being simultaneously orbitally stable with respect to co-periodic perturbations in Eulerian coordinates and mass Lagrangian coordinates. Again, this is not that an obvious result, because the meaning of co-periodic perturbations is different from one formulation to the other⁶.

Finally, it turns out from a simple algebraic computation that for (EKL) the negative signature of the Hessian of the constrained Hamiltonian in mass Lagrangian coordinates coincides with the negative signature of the qKdV operator,

$$\mathbf{a} := \text{Hess}(e + cq)[v],$$

where $q := \frac{1}{2}v^2$ is the qKdV impulse, and $c = -j^2$ is prescribed by the speed of the EKL wave. Two ingredients then lead to a set of sufficient stability conditions for (EKL). The first one is that, as mentioned above, $\mathbf{n}(\mathbf{a})$ is known in terms of the sign of $\theta_{\mu\mu}$, where θ is an alternative notation for the abbreviated action associated with qKdV waves — to avoid confusion with the one associated with EK waves, still denoted by Θ . The second ingredient follows from the observation that Θ is explicitly related to θ , so that by the chain rule $\text{Hess}\Theta$ can be expressed in terms of $\text{Hess}\theta$ and $\nabla\theta$.

3. Co-periodic, spectral instability

3.1. General setting

As in the introduction, we consider an abstract Hamiltonian system as in (100), with

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = \mathbf{B}\partial_x, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0,$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}[\mathbf{U}] = \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) = \mathcal{I}(v, u) + \mathcal{E}(v, v_x),$$

and denote by \mathcal{Q} the impulse — or momentum — defined by

$$\mathcal{Q}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}.$$

Furthermore, let us assume that \mathcal{I} is strongly convex with respect to u , and that \mathcal{E} is strongly convex with respect to v_x . Both (EKE) and (EKL) fit this abstract framework, with

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I}(\rho, u) = \frac{1}{2}\rho u^2, \quad \mathcal{E}(\rho, \rho_x) = \frac{1}{2}\mathfrak{m}(v)\rho_x^2 + F(\rho)$$

for the former, and

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I}(v, w) = \frac{1}{2}w^2, \quad \mathcal{E}(v, v_y) = \frac{1}{2}\mathfrak{n}(v)v_y^2 + f(v)$$

for the latter, as long as \mathfrak{n} , \mathfrak{m} , and ρ take positive values.

Recall that profiles $\underline{\mathbf{U}}$ of periodic wave solutions to (100) are characterized by the algebro-differential system made of (105), (106), which depends on the parameters $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \mathbb{R}^4$. Equivalently, by using (104), we can view the profile $\underline{\mathbf{U}}$ of waves of speed c as a spatially periodic, and steady solution to the system (100) rewritten in a mobile frame, which reads

$$(110) \quad \partial_t \mathbf{U} = \mathbf{B} \partial_x (\mathbf{E}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\mathbf{U}]).$$

6. More precisely, the prescription of the period on one side corresponds to a ‘zero mass’ perturbation on the other side, see Remark A.19 for more details.

For later use, let us note that (110) admits the conservation law

$$(111) \quad \partial_t \mathcal{Q}(\mathbf{U}) = \partial_x(\mathbf{U} \cdot \mathbf{E}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\mathbf{U}] + \mathbf{L}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\mathbf{U}]),$$

which is just (103) written in the mobile frame. In a similar way, let us note that as soon as Eq. (105) holds true, Eq. (106) equivalently reads

$$(112) \quad \underline{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{E}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}] + \mathbf{L}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}] = \mu,$$

We now fix such a periodic profile $\underline{\mathbf{U}}$, say of period Ξ , and assume without loss of generality that \underline{v}_x vanishes at $x = 0$, which will simplify a little bit our computations. Linearizing (110) about $\underline{\mathbf{U}}$, we receive the following system, in which the same notation \mathbf{U} now stands for the variation of the original \mathbf{U} around $\underline{\mathbf{U}}$,

$$(113) \quad \partial_t \mathbf{U} = \mathbf{B} \partial_x(\mathbf{A}\mathbf{U}),$$

where

$$\mathbf{A} := \text{Hess}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}].$$

In general, $\text{Hess}\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}]$ is the differential operator defined by

$$(\text{Hess}\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}]\mathbf{U})_\alpha = \frac{\partial^2 \mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}]}{\partial U_\alpha \partial U_\beta} U_\beta + \frac{\partial^2 \mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}]}{\partial U_\alpha \partial U_{\beta,x}} U_{\beta,x} - \text{D}_x \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}]}{\partial U_{\alpha,x} \partial U_\beta} U_\beta + \frac{\partial^2 \mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}]}{\partial U_{\alpha,x} \partial U_{\beta,x}} U_{\beta,x} \right),$$

and similarly for \mathcal{Q} . However, $\text{Hess}\mathcal{Q}[\underline{\mathbf{U}}]$ happens to merely coincide here with the matrix \mathbf{B}^{-1} , and \mathbf{A} is like $\text{Hess}\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}]$ a self-adjoint differential operator, of second order in v , with periodic coefficients of period Ξ . Our main purpose here is to derive a criterion ensuring that the composite differential operator

$$\mathcal{A} := \mathbf{B} \partial_x \mathbf{A}$$

does not have any spectrum in the complex, right-half plane, when the eigenfunctions are sought Ξ -periodic.

Let us recall the classical observations that the profile equation in (105) implies, by differentiation in x , that $\mathbf{A}\underline{\mathbf{U}}_x = 0$, and by differentiation with respect to parameters μ , λ , c , we see that⁷

$$\mathcal{A}\underline{\mathbf{U}}_\mu = 0, \quad \mathcal{A}\underline{\mathbf{U}}_{\lambda_1} = 0, \quad \mathcal{A}\underline{\mathbf{U}}_{\lambda_2} = 0, \quad \mathcal{A}\underline{\mathbf{U}}_c = -\underline{\mathbf{U}}_x.$$

Another useful relation, which follows from (113) but is more easily derived by linearizing (111) about $\underline{\mathbf{U}}$, is the following

$$\begin{aligned} \partial_t(\nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \underline{\mathbf{U}}) &= \partial_x(\underline{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{E}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}] + \underline{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{A}\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}} \cdot \nabla_{\underline{\mathbf{U}}}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}]) \\ &\quad + \partial_x(\partial_{v_x v} \mathcal{E}[v] v_x v + \partial_{v_x}^2 \mathcal{E}[v] v_x v_x), \end{aligned}$$

which can be simplified into

$$(114) \quad \partial_t(\nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \underline{\mathbf{U}}) = \partial_x(\underline{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{A}\underline{\mathbf{U}} - \underline{\kappa} v_{xx} v + \underline{\kappa} v_x v_x)$$

where $\underline{\kappa} := \partial_{v_x}^2 \mathcal{E}[v] > 0$ by assumption.

For all $z \in \mathbb{C}$, let us consider the spectral problem associated with (113),

$$(115) \quad z \mathbf{U} = \mathcal{A}\mathbf{U}$$

which amounts to looking for solutions of (113) of the form $e^{zt}\mathbf{U}(x)$. For such a solution, (114) readily implies by integration the following relation

$$z \int_0^\Xi \nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}(x)) \cdot \underline{\mathbf{U}}(x) dx = \underline{\mathbf{U}}(0) \cdot [\mathbf{A}\underline{\mathbf{U}}] - \underline{\kappa}(0) v_{xx}(0) [v],$$

7. Throughout the paper, subscripts μ , λ_1 , λ_2 — or simply λ when $N = 1$ —, and c stand for partial derivatives with respect to the parameters μ , λ , c .

where we have used the shortcut $[f]$ for expressions of the form $f(\Xi) - f(0)$, and the fact that $\underline{\mathbf{U}}$ is Ξ -periodic and chosen such that $\underline{v}_x(0) = 0$. Furthermore, by also integrating (115) over a period, we obtain

$$(116) \quad z \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}}(x) dx = \mathbf{B} [\mathbf{A}\underline{\mathbf{U}}].$$

Therefore, we have

$$(117) \quad z \int_0^\Xi \nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}(x)) \cdot \underline{\mathbf{U}}(x) dx = z \mathbf{B}^{-1} \underline{\mathbf{U}}(0) \cdot \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}}(x) dx - \underline{\kappa}(0) \underline{v}_{xx}(0) [v].$$

This relation will be used in a crucial way below, given that $\underline{\kappa}(0) > 0$ and $\underline{v}_{xx}(0) \neq 0$.

3.2. Evans function

The eigenvalue equations in (115) consist of a system of ODEs, which is of first order in u and third order in v . Rewriting this system as a first-order system of four ODEs — linear ODEs with Ξ -periodic coefficients, and denoting by $\mathbf{F}(\cdot; z)$ its fundamental solution, we see that the existence of a Ξ -periodic, nontrivial solution to (115) is equivalent to $D(z) = 0$, where

$$D(z) := \det(\mathbf{F}(\Xi; z) - \mathbf{F}(0; z)).$$

The function $D : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is called an Evans function⁸.

Theorem A.1. *In the framework of Sections 2 and 3.1, we make the ‘generic’ assumption (H0) There exists an open set Ω of \mathbb{R}^{N+2} and a family of periodic traveling profiles $\underline{\mathbf{U}}$ smoothly parametrized by $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$ such that (105)-(106) hold true, that is*

$$\mathbf{E}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}] = \boldsymbol{\lambda}, \quad \underline{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{E}\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}] + \mathbf{L}\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}] + c\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) = \mu.$$

If $N = 2$ then the Evans function D defined above has the following asymptotic behaviors

$$(118) \quad D(r) \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} r^4 (-\det(\mathbf{B}^{-1})) \det(\text{Hess}\Theta) + o(r^4), \quad D(r) > 0 \text{ for } r \gg 1.$$

If $\det(\text{Hess}\Theta) < 0$, then the corresponding wave is spectrally unstable.

Notice that $\det(\mathbf{B}^{-1}) = -b^2$ so that $(-\det(\mathbf{B}^{-1})) = |\det(\mathbf{B}^{-1})|$.

Proof.

We begin by observing that $\underline{\mathbf{U}}_x, \underline{\mathbf{U}}_\mu, \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_1}, \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_2}$ are solutions to the ODEs in (115) with $z = 0$, as a consequence — by differentiation in x — of the relations

$$(119) \quad \mathbf{A}\underline{\mathbf{U}}_x = 0, \quad \mathbf{A}\underline{\mathbf{U}}_\mu = 0, \quad \mathbf{A}\underline{\mathbf{U}}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\underline{\mathbf{U}}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

which themselves come from the differentiation of (105). Furthermore, $(\underline{\mathbf{U}}_x, \underline{\mathbf{U}}_\mu, \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_1}, \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_2})$ is an independent family. Indeed, would a linear combination $\beta_0 \underline{\mathbf{U}}_x + \beta_3 \underline{\mathbf{U}}_\mu + \beta_1 \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_1} + \beta_2 \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_2}$ be zero, the last two equations in (119) above would imply $\beta_1 = \beta_2 = 0$, so that $\beta_0 \underline{\mathbf{U}}_x + \beta_3 \underline{\mathbf{U}}_\mu = 0$, which turns out to be impossible unless $\beta_0 = \beta_3 = 0$. Indeed, by differentiation of (106) we see that

$$-\underline{\kappa} \underline{v}_{xx} \underline{v}_\mu + \underline{\kappa} \underline{v}_x \underline{v}_{\mu,x} = 1, \quad -\underline{\kappa} \underline{v}_{xx} \underline{v}_x + \underline{\kappa} \underline{v}_x \underline{v}_{xx} = 0,$$

so that \underline{v}_μ and \underline{v}_x cannot be colinear. (In the computation here above, we actually have differentiated (106) under the form (112), and used the same simplification as in the derivation of (114), as well as the first two equations in (119) to cancel out the terms $\underline{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{A}\underline{\mathbf{U}}_\mu$, and $\underline{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{A}\underline{\mathbf{U}}_x$, even though these simplifications are not necessary to show that $\underline{\mathbf{U}}_x$ and $\underline{\mathbf{U}}_\mu$ cannot be colinear. If the second equation obtained in this way is trivial, this

8. Here with Floquet exponent equal to zero, since we search for co-periodic eigenfunctions only; a more general Evans function would be $D(z, \alpha) := \det(\mathbf{F}(\Xi; z) - e^{i\alpha} \mathbf{F}(0; z))$, defined for all Floquet exponents $\alpha \in \mathbb{R}$.

is not the case for the first one.) Since we have enforced $\underline{v}_x(0) = 0$, the above relations imply in particular

$$(120) \quad \underline{\kappa}(0) \underline{v}_{xx}(0) \underline{v}_\mu(0) = -1.$$

This preliminary observation that $(\underline{\mathbf{U}}_x, \underline{\mathbf{U}}_\mu, \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_1}, \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_2})$ is an independent family allows us to consider the family of independent solutions $\mathbf{U}^j(\cdot; z)$, $j = 1, 2, 3, 4$, to (115) defined by the initial conditions

$$(\underline{v}^j(0; z), \underline{v}_x^j(0; z), \underline{v}_{xx}^j(0; z), \underline{u}^j(0; z))^\top = \begin{cases} (\underline{v}_x(0), \underline{v}_{xx}(0), \underline{v}_{xxx}(0), \underline{u}_x(0))^\top & \text{if } j = 1, \\ (\underline{v}_\mu(0), \underline{v}_{\mu,x}(0), \underline{v}_{\mu,xx}(0), \underline{u}_\mu(0))^\top & \text{if } j = 2, \\ (\underline{v}_{\lambda_1}(0), \underline{v}_{\lambda_1,x}(0), \underline{v}_{\lambda_1,xx}(0), \underline{u}_{\lambda_1}(0))^\top & \text{if } j = 3, \\ (\underline{v}_{\lambda_2}(0), \underline{v}_{\lambda_2,x}(0), \underline{v}_{\lambda_2,xx}(0), \underline{u}_{\lambda_2}(0))^\top & \text{if } j = 4. \end{cases}$$

We see that the Evans function equivalently reads $D(z) = E(z)/\Delta$, where

$$E(z) := \begin{vmatrix} [v^1] & \cdots & [v^4] \\ [v_x^1] & \cdots & [v_x^4] \\ [v_{xx}^1] & \cdots & [v_{xx}^4] \\ [u^1] & \cdots & [u^4] \end{vmatrix}, \quad \Delta := \begin{vmatrix} v^1(0) & \cdots & v^4(0) \\ v_x^1(0) & \cdots & v_x^4(0) \\ v_{xx}^1(0) & \cdots & v_{xx}^4(0) \\ u^1(0) & \cdots & u^4(0) \end{vmatrix}.$$

Here above and in the remaining part of this proof, the notation $[\cdot]$ is reserved for differences of values between $x = \Xi$ and $x = 0$, and has nothing to do with the evaluation of functionals anymore.

Low frequency expansion. This is basically a variation on the computation made in [22, Section B.2], with a few more details for the reader's convenience. We begin by observing that

$$[\mathbf{A}\mathbf{U}] = \begin{pmatrix} -\underline{\kappa}(0) [v_{xx}] \\ \underline{\alpha}(0) [u] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [v] \\ [v_x] \\ [u] \end{pmatrix}$$

where $\underline{\alpha} := \partial_u^2 \mathcal{J}(\underline{v}, \underline{u}) > 0$ by assumption, and $*$ stand for immaterial real numbers coming from the evaluation of \mathbf{U} and its derivatives at 0. Therefore, we can make some row combinations in the determinant defining $E(z)$ by using (116), and obtain

$$E(z) = -z^2 \det(\mathbf{B}^{-1}) \underline{\kappa}(0)^{-1} \underline{\alpha}(0)^{-1} \begin{vmatrix} [v^1] & \cdots & [v^4] \\ [v_x^1] & \cdots & [v_x^4] \\ \int_0^\Xi \mathbf{U}^1 & \cdots & \int_0^\Xi \mathbf{U}^4 \end{vmatrix}.$$

We can proceed in a similar way by using (117), which yields

$$E(z) = z^3 \det(\mathbf{B}^{-1}) \underline{\kappa}(0)^{-2} \underline{\alpha}(0)^{-1} \underline{v}_{xx}(0)^{-1} \times \begin{vmatrix} \int_0^\Xi \nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{U}^1 & \cdots & \int_0^\Xi \nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{U}^4 \\ [v_x^1] & \cdots & [v_x^4] \\ \int_0^\Xi \mathbf{U}^1 & \cdots & \int_0^\Xi \mathbf{U}^4 \end{vmatrix}.$$

Now, we observe that $(\mathbf{U}^1)|_{z=0} = \underline{\mathbf{U}}_x$, and by differentiating $z\mathbf{U}^1 = \mathcal{A}\mathbf{U}^1$ we see that $\underline{\mathbf{U}}_x = \mathcal{A}(\partial_z \mathbf{U}^1)|_{z=0}$. Therefore, $\mathbf{U}^1 + \underline{\mathbf{U}}_c$ is in the kernel of \mathcal{A} , which is spanned by $(\underline{\mathbf{U}}_x, \underline{\mathbf{U}}_\mu, \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_1}, \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_2})$ since this is an independent family of solutions to $\mathcal{A}\mathbf{U} = 0$, which is equivalent to a first-order system of four ODEs. We also have that $(\mathbf{U}^2)|_{z=0} = \underline{\mathbf{U}}_\mu$,

$(\mathbf{U}^1)|_{z=0} = \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_1}$, $(\mathbf{U}^1)|_{z=0} = \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_2}$, by the choice of initial conditions. We thus find that

$$E(z) = -z^4 \det(\mathbf{B}^{-1}) \underline{\kappa}(0)^{-2} \underline{\alpha}(0)^{-1} \underline{v}_{xx}(0)^{-1} \\ \times \begin{vmatrix} \int_0^{\Xi} \nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \underline{\mathbf{U}}_c & \int_0^{\Xi} \nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \underline{\mathbf{U}}_\mu & \int_0^{\Xi} \nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_1} & \int_0^{\Xi} \nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_2} \\ [v_{c,x}] & [v_{\mu,x}] & [v_{\lambda_1,x}] & [v_{\lambda_2,x}] \\ \int_0^{\Xi} \underline{\mathbf{U}}_c & \int_0^{\Xi} \underline{\mathbf{U}}_\mu & \int_0^{\Xi} \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_1} & \int_0^{\Xi} \underline{\mathbf{U}}_{\lambda_2} \end{vmatrix} + \mathcal{O}(z^5),$$

which equivalently reads, according to (109),

$$E(z) = -z^4 \det(\mathbf{B}^{-1}) \underline{\kappa}(0)^{-2} \underline{\alpha}(0)^{-1} \underline{v}_{xx}(0)^{-1} \times \begin{vmatrix} \Theta_{cc} & \Theta_{c\mu} & \Theta_{c\lambda_1} & \Theta_{c\lambda_2} \\ [v_{c,x}] & [v_{\mu,x}] & [v_{\lambda_1,x}] & [v_{\lambda_2,x}] \\ \Theta_{\lambda_1 c} & \Theta_{\lambda_1 \mu} & \Theta_{\lambda_1 \lambda_1} & \Theta_{\lambda_1 \lambda_2} \\ \Theta_{\lambda_2 c} & \Theta_{\lambda_2 \mu} & \Theta_{\lambda_2 \lambda_1} & \Theta_{\lambda_2 \lambda_2} \end{vmatrix} + \mathcal{O}(z^5).$$

Finally, using that $[v_{a,x}] = -\Xi_a \underline{v}_{xx}(0)$, for $a = c, \mu, \lambda_1, \lambda_2$ — which merely comes from the differentiation of the relation $\underline{v}_x(\Xi) = \underline{v}_x(0)$ with respect to those parameters — we obtain

$$E(z) = z^4 \det(\mathbf{B}^{-1}) \underline{\kappa}(0)^{-2} \underline{\alpha}(0)^{-1} \times \begin{vmatrix} \Theta_{cc} & \Theta_{c\mu} & \Theta_{c\lambda_1} & \Theta_{c\lambda_2} \\ \Xi_c & \Xi_\mu & \Xi_{\lambda_1} & \Xi_{\lambda_2} \\ \Theta_{\lambda_1 c} & \Theta_{\lambda_1 \mu} & \Theta_{\lambda_1 \lambda_1} & \Theta_{\lambda_1 \lambda_2} \\ \Theta_{\lambda_2 c} & \Theta_{\lambda_2 \mu} & \Theta_{\lambda_2 \lambda_1} & \Theta_{\lambda_2 \lambda_2} \end{vmatrix} + \mathcal{O}(z^5),$$

that is, recalling also from (109) that $\Xi = \Theta_\mu$,

$$E(z) = z^4 \det(\mathbf{B}^{-1}) \underline{\kappa}(0)^{-2} \underline{\alpha}(0)^{-1} \det \text{Hess} \Theta + \mathcal{O}(z^5).$$

On the other hand, using that

$$\mathbf{A}\mathbf{U}(0) = \begin{pmatrix} -\underline{\kappa}(0) \underline{v}_{xx}(0) \\ \underline{\alpha}(0) u(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0) \\ v_x(0) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

in general, and Eqs in (119), we can compute explicitly Δ by making row combinations again. By using (120) in the last step, we thus find that

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{v}_x(0) & \underline{v}_\mu(0) & \underline{v}_{\lambda_1}(0) & \underline{v}_{\lambda_2}(0) \\ \underline{v}_{xx}(0) & \underline{v}_{\mu,x}(0) & \underline{v}_{\lambda_1,x}(0) & \underline{v}_{\lambda_2,x}(0) \\ \underline{v}_{xxx}(0) & \underline{v}_{\mu,xx}(0) & \underline{v}_{\lambda_1,xx}(0) & \underline{v}_{\lambda_2,xx}(0) \\ \underline{u}_x(0) & \underline{u}_\mu(0) & \underline{u}_{\lambda_1}(0) & \underline{u}_{\lambda_2}(0) \end{vmatrix} \\ = -\underline{\kappa}(0)^{-1} \underline{\alpha}(0)^{-1} \begin{vmatrix} 0 & \underline{v}_\mu(0) & \underline{v}_{\lambda_1}(0) & \underline{v}_{\lambda_2}(0) \\ \underline{v}_{xx}(0) & \underline{v}_{\mu,x}(0) & \underline{v}_{\lambda_1,x}(0) & \underline{v}_{\lambda_2,x}(0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = \underline{\kappa}(0)^{-1} \underline{\alpha}(0)^{-1} \underline{v}_{xx}(0) \underline{v}_\mu(0) \\ = -\underline{\kappa}(0)^{-2} \underline{\alpha}(0)^{-1}.$$

Altogether with the expansion of $E(z)$, this gives

$$D(z) \stackrel{z \rightarrow 0}{\cong} -z^4 \det(\mathbf{B}^{-1}) \det \text{Hess}\Theta + \mathcal{O}(z^5).$$

High frequency expansion.

In order to find the sign of $D(z)$ for $z \in \mathbb{R}_+$ large enough, we can invoke a *homotopy argument*⁹. For this argument to work out, we must check that there exists $R > 0$ so that $D(r) \neq 0$ for $r \geq R$, and moreover that this R can be found to be uniform along the family of Evans functions associated with a continuous path going from the operator \mathcal{A} to a simpler operator, say $\widetilde{\mathcal{A}}$, for which we can compute the Evans function \widetilde{D} explicitly. We choose

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \widetilde{\mathbf{B}} \partial_x \text{Hess}\widetilde{\mathcal{H}}[\mathbf{U}], \quad \widetilde{\mathbf{B}}^{-1} := \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{H}}[\mathbf{U}] := \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v_x^2,$$

and postpone the search for R to the next paragraph.

Once we have this R , we know that $D(r)$ and $\widetilde{D}(r)$ have the same sign for $r \geq R$. Let us compute $\widetilde{D}(r)$. The eigenvalue equations $\widetilde{\mathcal{A}}\mathbf{U} = z\mathbf{U}$ equivalently read

$$\begin{cases} -\partial_x^3 v &= z b u, \\ \partial_x u &= z b v, \end{cases}$$

or

$$\partial_x \begin{pmatrix} v \\ v_x \\ v_{xx} \\ u \end{pmatrix} = \mathbb{A}(z) \begin{pmatrix} v \\ v_x \\ v_{xx} \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}(z) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z b \\ z b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

It is then a simple exercise to compute $\widetilde{D}(z) = \det(e^{\Xi \mathbb{A}(z)} - 1)$. In particular, for $z = r \in (0, +\infty)$, $\mathbb{A}(r)$ has four distinct eigenvalues, $\pm(1 \pm i)\sqrt{r|b|/2}$. Therefore, it is diagonalizable and

$$\begin{aligned} \det(e^{\Xi \mathbb{A}(r)} - 1) &= (e^{\Xi(1+i)\sqrt{r|b|/2}} - 1)(e^{\Xi(1-i)\sqrt{r|b|/2}} - 1)(e^{\Xi(-1+i)\sqrt{r|b|/2}} - 1)(e^{\Xi(-1-i)\sqrt{r|b|/2}} - 1) \\ &= \left| e^{\Xi(1+i)\sqrt{r|b|/2}} - 1 \right|^2 \left| e^{\Xi(-1+i)\sqrt{r|b|/2}} - 1 \right|^2 > 0. \end{aligned}$$

High enough frequencies are not eigenvalues. For any $\theta \in [0, 1]$, we set

$$\mathcal{A}_\theta := \widetilde{\mathbf{B}}_\theta \partial_x \text{Hess}\widetilde{\mathcal{H}}_\theta[\mathbf{U}] \quad \text{where } \widetilde{\mathcal{H}}_\theta = \theta \mathcal{H} + (1-\theta)\widetilde{\mathcal{H}} \quad \text{and} \quad \widetilde{\mathbf{B}}_\theta^{-1} = \theta \mathbf{B}^{-1} + (1-\theta)\widetilde{\mathbf{B}}^{-1}.$$

Notice that this does define a $\widetilde{\mathbf{B}}_\theta$ since the formula for $\widetilde{\mathbf{B}}_\theta^{-1}$ defines a matrix with determinant $\det(\mathbf{B}^{-1})$. The aim is to find $R \in (0, +\infty)$ such that, for all $\theta \in [0, 1]$, the operator \mathcal{A}_θ does not have any Ξ -periodic eigenfunction associated with a real eigenvalue $r \geq R$. Observing that \mathcal{A}_θ is — on purpose — exactly of the same form as \mathcal{A} , by just replacing \mathbf{B}^{-1} , \mathcal{I} , \mathcal{E} by

$$\widetilde{\mathbf{B}}_\theta^{-1} := \begin{pmatrix} \theta a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I}_\theta = \theta \mathcal{I} + (1-\theta)(\frac{1}{2}u^2), \quad \mathcal{E}_\theta = \theta \mathcal{E} + (1-\theta)(\frac{1}{2}v_x^2),$$

we can drop θ and seek R for \mathcal{A} under the only assumptions that b is fixed and positive, a may vary while staying bounded, $\underline{\kappa} = \partial_{v_x}^2 \mathcal{E}[v]$ and $\underline{\alpha} = \partial_u^2 \mathcal{I}[v, u]$ are bounded, positive and bounded away from zero. Such an R can be derived from some rough *a priori* estimates. A similar computation was made in [22, Section B.1], with a slight mistake which can be fixed by modifying the high order estimate accordingly with what follows.

Let us write the eigenvalue equations (115) in a more explicit way,

$$\begin{cases} \partial_x(\mathbf{M}v + \beta v + \gamma u) + c \partial_x(av + bu) = r(av + bu), \\ \partial_x(\gamma v + \underline{\alpha}u) + c \partial_x(bv) = r b v, \end{cases}$$

⁹ Usual in many related computations, but apparently used for the first time in a periodic context; see Remark A.4.

where $\mathbf{M} := \text{Hess}\mathcal{E}[v] = -\partial_x \underline{\kappa} \partial_x + q$ with q bounded, and $\underline{\beta} := \partial_v^2 \mathcal{S}[v, u]$, $\gamma := \partial_{uv} \mathcal{S}[v, u]$ bounded too. On the one hand, taking the inner product of the system above with

$$\mathbf{B} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/b \\ v/b - au/b \end{pmatrix}$$

in $L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ and integrating by parts, we find that

$$\begin{aligned} r(\|v\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2) &= \int_0^\Xi (u_x \partial_x(\underline{\kappa} v_x) + u \partial_x((q + \underline{\beta})v + \gamma u) + (v - au) \partial_x(\gamma v + \underline{\alpha} u))/b \, dx \\ &\leq C(\|v\|_{H^2}^2 + \|u\|_{H^1}^2) \end{aligned}$$

for some constant C depending only the bounds on a , $\underline{\kappa}$, q , $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, γ . On the other hand, taking the inner product of the system above with $(v_x, u_x)^\top$, and integrating by parts again, we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\Xi (v_{xx} \partial_x(\underline{\kappa} v_x) + v_x \partial_x((q + \underline{\beta})v + \gamma u) + u_x \partial_x(\gamma v + \underline{\alpha} u) \\ &\quad + c v_x \partial_x(av + bu) + c u_x \partial_x(bv)) \, dx \\ &= \int_0^\Xi (\underline{\kappa} v_{xx}^2 + \underline{\alpha} u_x^2) \, dx + \int_0^\Xi (\underline{\kappa}_x v_x v_{xx} - \gamma v_{xx} u + v_x \partial_x((q + \underline{\beta} + ac)v) \\ &\quad + u_x \partial_x((\gamma + 2bc)v)) \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^\Xi (\underline{\kappa} v_{xx}^2 + \underline{\alpha} u_x^2) \, dx - C'(\|v\|_{H^1}^2 + \|u\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

for some other constant C' depending only the bounds on a , $\underline{\kappa}$, $\underline{\kappa}_x$, q , $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, γ , γ_x . Using once more that $\underline{\kappa}$ and $\underline{\alpha}$ are positive and bounded away from zero, we thus find a constant C'' such that

$$\|v\|_{H^2}^2 + \|u\|_{H^1}^2 \leq C''(\|v\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2).$$

(Note that $\|v_x\|_{L^2}^2$ has been absorbed in the left-hand side.) Therefore, we have

$$r(\|v\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2) \leq CC''(\|v\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2),$$

which implies that v and u must be zero if $r > CC''$.

Conclusion. By the mean value theorem, a necessary condition for stability of the wave is that D does not change sign on $(0, +\infty)$. Combining the low frequency expansion with the fact that $D(r)$ is positive for large r , we obtain the necessary condition for co-periodic stability

$$-\det(\mathbf{B}^{-1}) \det \text{Hess}\Theta \geq 0.$$

which requires that $\det \text{Hess}\Theta$ be nonnegative. \square

We can show a similar result in the case $N = 1$, which corresponds to (qKdV), or equivalently $\mathbf{U} = v$, $\mathcal{H}[\mathbf{U}] = \mathcal{E}(v, v_x)$, $\mathbf{B} = 1$, $\mathcal{Q} = q = \frac{1}{2}v^2$ in the abstract form (101). In this case, the profile equation (105) reduces to the scalar Euler–Lagrange equation

$$\mathbf{E}(\mathcal{E} + c\mathcal{Q})[v] = \lambda,$$

and the abbreviated action is defined as in (107) by just dropping the u -component and \mathcal{S} :

$$\theta(\mu, \lambda, c) := \int_0^\Upsilon (\mathcal{E}(v, v_x) + c\mathcal{Q}(v) - \lambda v + \mu) \, dx.$$

For a reason that will be clarified in Section 5.2, we have substituted Υ for Ξ as the period of the wave. The Evans function is also defined as before by

$$d(z) := \det(\mathbf{f}(\Upsilon; z) - \mathbf{f}(0; z)),$$

where $\mathbf{f}(\cdot; z)$ is now the fundamental solution of the third order ODE

$$(121) \quad \partial_x(\text{Hess}(\mathcal{E} + c\mathcal{Q})[v]) = z v$$

viewed as a first-order system.

Theorem A.2. *Under assumption (H0), in the case $N = 1$, the Evans function defined above has the following asymptotic behaviors*

$$(122) \quad d(r) \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} r^3 \det(\text{Hess}\theta) + o(r^3), \quad d(r) < 0 \text{ for } r \gg 1.$$

If $\det(\text{Hess}\theta) > 0$, then the corresponding wave is spectrally unstable.

For consistency, notice that here $\det(\mathbf{B}^{-1}) = 1$.

Proof.

We can basically copy-paste computations from the proof of Theorem A.1, by taking $\mathbf{B} = 1$, and dropping the u -components, \mathcal{I} , and all terms in λ_2 . We just have to pay attention to where the signs change. A first, obvious one is that $\det \mathbf{B}$ is now positive. There is another change of sign in the computation of $E(z)$ near zero, because there is now only one row where we find a minus sign by writing $\int_0^{\Xi} \underline{v} dx = -\theta_\lambda$. So these two changes of sign give the claimed asymptotic expansion at zero. There is a third, and last change of sign in the computation of $d(r)$ for large r . Indeed, the ODE to solve is now

$$-\partial_x^3 v = r v,$$

which has the three wavenumbers $k_0 = -\sqrt[3]{r}$, $k_1 = e^{i\pi/3} \sqrt[3]{r}$, and $\overline{k_1}$ for $r > 0$. Therefore, $\tilde{d}(r) = (e^{k_0} - 1) |e^{k_1} - 1|^2 < 0$. \square

Remark A.3. Our main implicit restriction — even at the abstract level — is that we only consider systems for which, by a suitable number of integrations, the original traveling-wave profile system may be converted in a planar Hamiltonian, reduced, profile equation. Otherwise one would expect, as in the well-studied — and algebraically much simpler — case of solitary waves, some orientation index to enter in formulas for stability indices. For solitary waves, the computation of the necessary orientation index from geometric invariants is still the object of intense research ; see for instance [35] and references therein.

Remark A.4. As said in the introduction, this result confirms earlier findings by Johnson [77] in the special case when \cap is constant. Though our presentation for (qKdV) does not follow the one by Johnson for (gKdV), some of our steps do not differ significantly. By contrast, some others are fundamentally different, as required by the quasilinear nature of our problem. For instance, in the foregoing proof, the purpose of the homotopy argument and the auxiliary resolvent estimates is precisely to reduce computations to a semilinear case. When equations are already in semilinear form, those techniques are not needed, and a readily regular limit $\lambda \rightarrow \infty$ leads to a constant-coefficient problem. Likewise, the local well-posedness results invoked in Section 5 for applying our abstract orbital stability to actual PDEs is dramatically improved for semilinear versions of those equations. These observations are instances of the usual rule of thumb that departures of quasilinear strategies from semilinear ones are only required when some high-frequency control is needed.

Remark A.5. It is instructive to seek parallels of our results in the classical stability theory for steady states of finite-dimensional Hamiltonian systems of ordinary differential equations. Indeed, up to replacing Evans' functions with characteristic polynomials, the foregoing proofs echo the classical proof that steady states at which the Hessian of the Hamiltonian is nonsingular and has an odd number of negative directions are spectrally instable. We claim that the analogy goes further. On the one hand, it follows from our proof that the sign of $\det(\text{Hess}\Theta)$ provides us with the parity of the number of eigenvalues of \mathcal{A} on $(0, +\infty)$. On the other hand, as we shall see in the next section, the relevant Hessian there is the constrained Hessian $\mathbf{A}|_{T_{\mathbf{U}}\mathcal{C}}$. Even though we do not endeavor to prove

it in the present paper, we do expect that the parity of the negative signature of $\mathbf{A}_{|T_{\mathbf{U}}\mathcal{E}}$ and of the number of eigenvalues of \mathcal{A} on $(0, +\infty)$ coincide, so that the results of the current section could be thought of as a direct analogue of the finite-dimensional case, with $\mathbf{A}_{|T_{\mathbf{U}}\mathcal{E}}$ in place of the classical Hessian of the Hamiltonian. The deepest way to prove our claim regarding the agreement of those parities consists in examining the *Krein signature* of eigenvalues. Indeed, building on the fact that eigenvectors of \mathcal{A} are orthogonal for the quadratic form associated with \mathbf{A} , one may expect to prove that the negative signature of $\mathbf{A}_{|T_{\mathbf{U}}\mathcal{E}}$ is the number of eigenvalues z , with $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ and negative Krein signature, and our claim on parity would then follow from the fact that eigenvalues with $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ but $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ come in pairs. See detailed discussions, precise statements and proofs of similar results in [83, 33, 34] and [84, Chapter 7].

4. Co-periodic, orbital stability

4.1. Abstract setting

We still consider a Hamiltonian system of the form (101), which we relabel here for the reader's convenience :

$$(123) \quad \partial_t \mathbf{U} = \partial_x (\mathbf{B} \mathcal{E} \mathcal{H}[\mathbf{U}]),$$

with \mathbf{U} taking values in \mathbb{R}^N , \mathbf{B} a nonsingular, symmetric $N \times N$ matrix, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)$, and denote by \mathcal{Q} the impulse — or momentum — defined by

$$\mathcal{Q}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{U}.$$

Eq. (123) is obviously a system of N (local) conservation laws of order at most three in the spatial variable x . Of course we have in mind the more specific forms of \mathbf{B} and \mathcal{H} that are described in Section 3.1, and correspond to either (qKdV) in the case $N = 1$, or to (EK) in the case $N = 2$. In the latter case, the first conservation law is of order one, and the second one is of order three as regards the first dependent variable, and of order one for the second dependent variable. Section 5 is devoted to a detailed investigation of those ‘examples’. Here, we refrain from restricting to any specific form of \mathbf{B} and \mathcal{H} , in order to emphasize the crucial ingredients in the proof of co-periodic, orbital stability. The reader is referred to Sections 5.1 and 5.2 for an application of our abstract result (Theorem A.6 below) to respectively (qKdV) and (EK).

As far as smooth solutions of (123) are concerned, they satisfy at least two additional, local conservation laws. One is the conservation of the impulse \mathcal{Q} , Eq. (103), and the other one is the conservation of the Hamiltonian \mathcal{H} , which explicitly reads

$$\partial_t \mathcal{H}[\mathbf{U}] = \partial_x \left(\frac{1}{2} \mathcal{E} \mathcal{H}[\mathbf{U}] \cdot \mathbf{B} \mathcal{E} \mathcal{H}[\mathbf{U}] + \nabla_{\mathbf{U}_x} \mathcal{H}[\mathbf{U}] \cdot \mathbf{B} \partial_x \mathcal{E} \mathcal{H}[\mathbf{U}] \right).$$

All these local conservation laws have the most important consequence that, along smooth periodic solutions to (123), we have

$$(124) \quad \frac{d}{dt} \int_0^\Xi \mathbf{U} dx = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}) dx = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_0^\Xi \mathcal{H}[\mathbf{U}] dx = 0,$$

if Ξ denotes the period of those solutions. For a given Ξ , we call *energy space*, and denote by \mathbb{H}_Ξ a dense subspace of $(L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N$ on which the functional

$$\mathbf{U} \mapsto \int_0^\Xi \mathcal{H}[\mathbf{U}] dx$$

is (at least) \mathcal{C}^2 . Behind this loose definition, we merely have in mind $\mathbb{H}_\Xi = H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ for (qKdV), and $\mathbb{H}_\Xi = H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ for (EK). Note that the linear functional

$$\mathbf{U} \mapsto \int_0^\Xi \mathbf{U} dx$$

is automatically \mathcal{C}^∞ on $(L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N$, by the embedding $L^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$, and that the quadratic functional

$$\mathbf{U} \mapsto \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}) dx$$

is also \mathcal{C}^∞ on $(L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N$ by the Cauchy–Schwarz inequality. Therefore, whatever the constants $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \mathbb{R}^{N+2}$, the functional

$$\mathbf{U} \mapsto \mathcal{F}[\mathbf{U}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] := \int_0^\Xi (\mathcal{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x) + c\mathcal{Q}(\mathbf{U}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{U} + \mu) dx$$

is \mathcal{C}^2 on the energy space \mathbb{H}_Ξ . Let us point out that these functionals — in particular $\mathcal{F}[\mathbf{U}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c]$ — are invariant under the action of spatial translations $\mathbf{U} \mapsto \mathbf{U}(\cdot + s)$ on Ξ -periodic functions \mathbf{U} , so that they are indeed well defined for \mathbf{U} viewed as a function on the circle $\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}$. Furthermore, (124) implies that $\mathcal{F}[\cdot; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c]$ is preserved along smooth, Ξ -periodic solutions of (123).

Our main assumptions are the following.

(H0) There exists an open set Ω of \mathbb{R}^{N+2} and a family of periodic traveling profiles $\underline{\mathbf{U}}$ parametrized by $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$ such that the profile equations in (105)-(106),

$$\mathbb{E}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}] = \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbb{L}\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}] - c\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \mu,$$

hold true, and the mapping $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega \mapsto (\underline{\mathbf{U}}, \Xi) \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ is continuously differentiable, where Ξ denotes the period of the profile $\underline{\mathbf{U}}$.

(H1) The derivative of the period Ξ with respect to the energy level μ , denoted by Ξ_μ , does not vanish on Ω , and the abbreviated action integral

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \int_0^\Xi (\mathcal{H}(\underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{U}}_x) + c\mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \mu) dx$$

is such that the matrix

$$\mathbf{C} := \frac{\check{\nabla}\Theta_\mu \otimes \check{\nabla}\Theta_\mu}{\Theta_{\mu\mu}} - \check{\nabla}^2\Theta,$$

is nonsingular for $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$, with $\check{\nabla} = \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \\ \partial_c \end{pmatrix}$.

(H2) For all Ξ in the set of periods achieved on Ω , there exists a dense subspace \mathbb{H}_Ξ of $(L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N$, and an open subset of \mathbb{H}_Ξ containing all the profiles $\underline{\mathbf{U}}$ on which the functional

$$\mathbf{U} \mapsto \int_0^\Xi \mathcal{H}[\mathbf{U}] dx$$

is \mathcal{C}^2 , and if we denote by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the dual product between \mathbb{H}'_Ξ and \mathbb{H}_Ξ , there exists a positive number α such that

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}_\Xi}^2 = \langle \text{Hess}\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}]\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle + \alpha \|\mathbf{U}\|_{L^2}^2$$

defines an equivalent norm on \mathbb{H}_Ξ , uniformly in the parameters defining the Ξ -periodic profile $\underline{\mathbf{U}}$.

(H3) For all Ξ in the set of periods achieved on Ω , there exists a dense subspace \mathbb{W}_Ξ of the energy space \mathbb{H}_Ξ on which the Cauchy problem for (101) is locally well-posed.

These assumptions are discussed in detail for (qKdV) and (EK) in Section 5. Roughly speaking, **(H0)** and **(H1)** are non-degeneracy assumptions, while **(H2)** is an ellipticity assumption, and **(H3)** is expected to hold true for a subspace of the energy space in which functions have enough regularity to yield classical solutions of (101). Such assumptions are often implicitly made in the related literature.

4.2. An index for co-periodic, orbital stability

Theorem A.6. *Under the assumptions **(H0)**-**(H1)**-**(H2)**-**(H3)**, for all $(\mu, \lambda, c) \in \Omega$ such that*

- *the negative signature of \mathbf{C} equals the one of the operator $\mathbf{A} = \text{Hess}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}]$,*
- *the kernel of \mathbf{A} is spanned by $\underline{\mathbf{U}}_x$,*

the periodic wave of profile $\underline{\mathbf{U}}$ is conditionally, orbitally stable in the following sense.

For all $\varepsilon > 0$, there exists $\eta > 0$ so that, for all $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{W}_\Xi$ such that $\|\mathbf{U}_0 - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \eta$, if T is the maximal time of existence of the solution $\mathbf{U} : t \mapsto \mathbf{U}(\cdot, t) \in \mathbb{W}_\Xi$ to (123) such that $\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0$, then

$$\inf_{s \in \mathbb{R}} \|\mathbf{U}(\cdot, t) - \underline{\mathbf{U}}(\cdot + s)\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T].$$

In practice, for the cases discussed in Section 5, the fact that the kernel of \mathbf{A} is spanned by $\underline{\mathbf{U}}_x$ is a consequence of the assumption in **(H1)** that Ξ_μ is nonzero. This is nevertheless a crucial point in the proof of Theorem A.6, that is why we state it explicitly. Otherwise, the most important and nontrivial assumption is

$$n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{C}) = 0.$$

In this respect, the integer $n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{C})$ may be called an *orbital stability index*. It is investigated in more details in Section 5, where we show in particular its connection with the negative signature of $\text{Hess}\Theta$ itself, given by the simple formula

$$(125) \quad n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{C}) = n(\text{Hess}\Theta) - N.$$

Remark A.7. At the abstract level of Theorem A.6, it is not obvious that the stability criterion $n(\mathbf{A}) = n(\mathbf{C})$ contains the necessary condition $(-1)^N \det \text{Hess}\Theta \geq 0$ derived in Section 3 (Theorems A.1 and A.2) for spectral stability. However, if we admit (125) for a while, we readily see that a null orbital stability index means that $n(\text{Hess}\Theta) = N$, which implies that $(-1)^N \det \text{Hess}\Theta \geq 0$. For an alternative connection, see Remarks A.4 & A.9.

Remark A.8. In special cases, genuine orbital stability can be inferred from conditional orbital stability. This was done¹⁰ for example by Bona and Sachs [23, Theorem 4] regarding the stability of solitary waves in (EKL) with a constant \cap . Indeed, in this case (EKL) is a *semilinear* system of PDEs, and a bound on the low order derivatives of the energy space yields a bound on higher order derivatives, by differentiation of the PDEs and by commutator estimates for the lower order terms.

Remark A.9. Going on with our analogy with the finite-dimensional, ODE case initiated in Remark A.4, we observe that the above theorem essentially shows that, if the negative signature of $\mathbf{A}|_{T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{E}}$ is *zero* (see Eq. (126) below) then the wave is nonlinearly stable, while the results of the previous section show that, if that negative signature is *odd* then the wave is spectrally unstable. Even in the finite-dimensional case, this offers a genuine dichotomy¹¹ only for *planar* ODEs. For periodic waves, by contrast with what happens

10. In the sense that it is proved there that solutions starting sufficiently close to the background wave are global in time. However the result is still conditional in the sense that \mathbf{U}_0 is required to have higher regularity — $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{W}_\Xi$ — than afforded by the energy norm $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_\Xi}$.

11. Up to considering also the opposite of the ‘natural’ Hamiltonian, if needed.

for the effectively lower-dimensional solitary waves or kinks, it turns out that we *never* have a genuine dichotomy. Nevertheless, by transferring *infinite-dimensional* conditions on $\mathbf{A}|_{T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C}}$ to *finite-dimensional* ones on $\text{Hess}\Theta$, we have come up with the neat following criteria :

- if $\mathfrak{n}(\text{Hess}\Theta) - N$ is zero then the wave is nonlinearly stable (by Theorem A.6 plus (125));
- if $\mathfrak{n}(\text{Hess}\Theta) - N$ is odd then the wave is spectrally unstable (by Theorems A.1 & A.2).

Proof.

[Proof of Theorem A.6] It heavily relies on [21, Theorem 3], in which we proved that

$$(126) \quad \mathfrak{n}(\mathbf{A}) = \mathfrak{n}(\mathbf{A}|_{T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C}}) + \mathfrak{n}(\mathbf{C}),$$

with

$$T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C} := \{\mathbf{U} \in (L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N; \int_0^\Xi \mathbf{U} \, dx = 0, \int_0^\Xi \mathbf{U} \cdot \nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \, dx = 0\},$$

and is a revisited — expanded and more accurate — version of the proof of Corollary 2 in [21]. We proceed in the same spirit as in [41, Theorem 7.3].

Step 1. Orbital stability within the constraint manifold

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{U} \in \mathbb{H}_\Xi; \int_0^\Xi \mathbf{U} \, dx = \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} \, dx, \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}) \, dx = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \, dx\}.$$

The assumption $\mathfrak{n}(\mathbf{A}) = \mathfrak{n}(\mathbf{C})$ implies $\mathfrak{n}(\mathbf{A}|_{T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C}}) = 0$ by the formula in (126) recalled above. Since the kernel of \mathbf{A} is spanned by $\underline{\mathbf{U}}_x$, this altogether implies the existence of $C > 0$ so that

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \geq C \|\mathbf{V}\|_{L^2}^2$$

for all $\mathbf{V} \in \mathbb{H}_\Xi$ such that

$$(127) \quad \int_0^\Xi \mathbf{V} \, dx = 0, \quad \int_0^\Xi \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) \, dx = 0, \quad \int_0^\Xi \mathbf{V} \cdot \underline{\mathbf{U}}_x \, dx = 0.$$

In addition, C is bounded by below by a uniform positive constant when the parameters $(\boldsymbol{\lambda}, c)$ vary in a (small) compact subset of Λ , the projection of Ω onto \mathbb{R}^{N+1} , and μ is implicitly defined as a function of $(\boldsymbol{\lambda}, c)$ by the fixed period Ξ (which is made possible by the assumption $\Xi_\mu \neq 0$ in **(H1)**). Therefore, by **(H2)**, there exists another positive constant \tilde{C} such that

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \geq \tilde{C} \|\mathbf{V}\|_{\mathbb{H}_\Xi}^2,$$

for all $\mathbf{V} \in \mathbb{H}_\Xi$ satisfying (127). Indeed, using the equivalent norm on \mathbb{H}_Ξ given in **(H2)**, up to augmenting α in such a way that

$$-c \mathbf{V} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{V} \leq \alpha \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}, \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^N,$$

(and c possibly varying in a compact set of possible wave velocities), and recalling that $\mathbf{A} = \text{Hess}\mathcal{H}[\underline{\mathbf{U}}] + c\mathbf{B}^{-1}$, we see that

$$\|\mathbf{V}\|_{\mathbb{H}_\Xi}^2 = \langle \mathbf{A}\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle - c \int_0^\Xi \mathbf{V} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{V} \, dx + \alpha \int_0^\Xi \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \, dx \leq \left(1 + \frac{2\alpha}{C}\right) \langle \mathbf{A}\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle$$

for $\mathbf{V} \in \mathbb{H}_\Xi$ satisfying (127).

Now, by Taylor expansion we have

$$\mathcal{F}[\mathbf{U}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] - \mathcal{F}[\underline{\mathbf{U}}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}(\mathbf{U} - \underline{\mathbf{U}}), \mathbf{U} - \underline{\mathbf{U}} \rangle + o(\|\mathbf{U} - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi}^2)$$

for $\mathbf{U} \in \mathbb{H}_\Xi$ close to $\underline{\mathbf{U}}$. In the expansion here above, the first order term has vanished because of the profile equation $\mathbf{E}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})[\underline{\mathbf{U}}] = \boldsymbol{\lambda}$, which means that $\underline{\mathbf{U}}$ is a critical point of the functional $\mathcal{F}[\cdot; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c]$, and the second order term comes from the fact that the operator $\mathbf{A} = \text{Hess}(\mathcal{H} + c\mathcal{Q})$ is precisely the second variational derivative of the functional $\mathcal{F}[\cdot; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c]$. For those $\mathbf{U} \in \mathbb{H}_\Xi$ close to $\underline{\mathbf{U}}$ that in addition belong to \mathcal{C} , we have

$$\mathbf{U} - \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{V} + o(\|\mathbf{U} - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi}), \quad \mathbf{V} \in T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C},$$

which means that \mathbf{V} satisfies the constraints in (127) except for the last one. A nowadays well-known trick to enforce this constraint is to use translation invariance and the implicit function theorem to prove the following.

Lemma A.10. *For all $\epsilon > 0$ we define*

$$\mathbb{U}_\epsilon = \{\mathbf{U} \in \mathbb{H}_\Xi; \inf_{s \in \mathbb{R}} \|\mathbf{U} - \underline{\mathbf{U}}(\cdot + s)\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \epsilon\}.$$

There exists $\epsilon_0 > 0$ and a \mathcal{C}^1 function $\tau : \mathbb{U}_{\epsilon_0} \rightarrow \mathbb{R}$ such that for all $\mathbf{U} \in \mathbb{U}_{\epsilon_0}$,

$$\int_0^\Xi (\mathbf{U}(x + \tau(\mathbf{U})) - \underline{\mathbf{U}}(x)) \cdot \underline{\mathbf{U}}_x(x) dx = 0, \quad \|\mathbf{U}(\cdot + \tau(\mathbf{U})) - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \epsilon_0,$$

and

$$\|\mathbf{U}(\cdot + \tau(\mathbf{U})) - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi} \rightarrow 0 \quad \text{when} \quad \inf_{s \in \mathbb{R}} \|\mathbf{U} - \underline{\mathbf{U}}(\cdot + s)\|_{\mathbb{H}_\Xi} \rightarrow 0.$$

As a consequence, for $\mathbf{U} \in \mathbb{U}_{\epsilon_0} \cap \mathcal{C}$, we have by the invariance of $\mathcal{F}[\cdot; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c]$ under spatial translations,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{U}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] - \mathcal{F}[\underline{\mathbf{U}}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] &= \mathcal{F}[\tilde{\mathbf{U}}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] - \mathcal{F}[\underline{\mathbf{U}}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle dx + o(\|\tilde{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi}^2), \end{aligned}$$

where we have denoted by $\tilde{\mathbf{U}}$ the translate $\mathbf{U}(\cdot + \tau(\mathbf{U}))$, so that

$$\tilde{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{V}} + o(\|\tilde{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi}), \quad \tilde{\mathbf{V}} \in T_{\underline{\mathbf{U}}}\mathcal{C}, \quad \int_0^\Xi \tilde{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{U}}_x dx = 0.$$

Therefore, we have the lower bound

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{U}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] - \mathcal{F}[\underline{\mathbf{U}}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] &\geq \frac{\tilde{C}}{2} \|\tilde{\mathbf{V}}\|_{\mathbb{H}_\Xi}^2 + o(\|\tilde{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi}^2) \\ &\geq \frac{\tilde{C}}{4} \|\tilde{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi}^2, \end{aligned}$$

for $\mathbf{U} \in \mathbb{U}_{\epsilon_1} \cap \mathcal{C}$ and some $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_0]$.

This is all what we need to use $\mathcal{F}[\cdot; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c]$ as a Lyapunov function to show orbital stability within \mathcal{C} . Even though this is a classical reasoning, we give it for completeness. For all $\varepsilon \in (0, \epsilon_1]$, for all $\mathbf{U} \in \mathbb{U}_{\epsilon_1} \cap \mathcal{C}$ such that $\|\tilde{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi} = \varepsilon$, we have

$$\mathcal{F}[\mathbf{U}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] \geq \mathcal{F}[\underline{\mathbf{U}}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] + \frac{\tilde{C}}{4} \varepsilon^2 =: m(\varepsilon) > \mathcal{F}[\underline{\mathbf{U}}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c].$$

By continuity of $\mathcal{F}[\cdot; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c]$ at $\underline{\mathbf{U}}$ and its invariance under spatial translations, there exists $\eta \in (0, \varepsilon]$ such that

$$\mathcal{F}[\mathbf{U}; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] < m(\varepsilon)$$

for all $\mathbf{U} \in \mathbb{U}_\eta$. Therefore, if we take $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{W}_\Xi \cap \mathbb{U}_\eta \cap \mathcal{C}$, and denote by $\mathbf{U}(t)$ the solution at time $t \in [0, T)$ of (123) such that $\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0$, we have

$$\mathcal{F}[\mathbf{U}(t); \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] = \mathcal{F}[\mathbf{U}_0; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] < m(\varepsilon)$$

for all $t \in [0, T)$. Since $\mathbf{U}(t)$ belongs to \mathcal{C} by the conservation of $\int_0^\Xi \mathbf{U} dx$ and $\int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}) dx$ in (124), the definition of $m(\varepsilon)$ and the mean value theorem prevent $\|\tilde{\mathbf{U}}(t) - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi}$ from growing larger than ε . Indeed, if this happened, there should exist a time t such that $\|\tilde{\mathbf{U}}(t) - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi} = \varepsilon$, hence in particular $\mathbf{U}(t) \in \mathbb{U}_{\epsilon_1} \cap \mathcal{C}$, and therefore

$$\mathcal{F}[\mathbf{U}(t); \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] \geq m(\varepsilon)$$

whereas we know that

$$\mathcal{F}[\mathbf{U}(t); \mu, \boldsymbol{\lambda}, c] < m(\varepsilon).$$

This proves that $\mathbf{U}(t)$ belongs to \mathbb{U}_ε whenever $\mathbf{U}(0) \in \mathbb{U}_\eta \cap \mathcal{C}$. In addition, this η — as well as the ϵ_0, ϵ_1 invoked in the derivation of η — can be chosen to be the same

for parameters $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ varying in a compact subset of Ω on which the period Ξ remains constant, because \mathcal{F} is uniformly continuous on compact sets of $\mathbb{H}_\Xi \times \Omega$, the profile $\underline{\mathbf{U}}$ depends continuously on the parameters $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$, as well as the lower bound \tilde{C} , as already mentioned. This uniformity will be used in a crucial way in the final argument.

Step 2. Find a way out of the constraint manifold.

For fixed $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$, let us denote by $\underline{\mathbf{U}}$ the associated profile, of period Ξ ,

$$\underline{\mathbf{U}}_\epsilon = \{ \mathbf{U} \in \mathbb{H}_\Xi ; \inf_{s \in \mathbb{R}} \|\mathbf{U} - \underline{\mathbf{U}}(\cdot + s)\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \epsilon \}$$

for all $\epsilon > 0$, We still denote by $\underline{\mathbf{U}}$ profiles associated with ‘generic’ parameters $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$. There exists a neighborhood \mathbb{B}_ϵ of $(\boldsymbol{\lambda}, c)$ in Λ such that for all $(\boldsymbol{\lambda}, c) \in \mathbb{B}_\epsilon$ and $\mu = \mu(\boldsymbol{\lambda}, c)$ — prescribed by the fixed period Ξ —, the corresponding profile $\underline{\mathbf{U}}$ belongs to $\underline{\mathbf{U}}_\epsilon$.

Next, we claim that for (\mathbf{M}, P) close enough to $(\int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx, \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx)$, say

$$\left\| \mathbf{M} - \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx \right\|_{\mathbb{R}^N} \leq \delta(\epsilon), \quad \left| P - \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx \right| \leq \delta(\epsilon)$$

for some positive $\delta(\epsilon)$, there exists $(\boldsymbol{\lambda}, c) \in \mathbb{B}_\epsilon$ such that the traveling profile $\underline{\mathbf{U}}$ associated with $(\mu(\boldsymbol{\lambda}, c), \boldsymbol{\lambda}, c)$ satisfies

$$\int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx = \mathbf{M}, \quad \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx = P.$$

This follows from the inverse mapping theorem. As a matter of fact, the Jacobian matrix of the mapping

$$(\boldsymbol{\lambda}, c) \mapsto (\int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx, \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx)$$

turns out to be $-\mathbf{C}$. This is precisely the reason why we have called \mathbf{C} the *constraint* matrix. For more details, see [21, Theorem 3] where we use in a crucial way relations in (109),

$$\Theta_\mu = \Xi, \quad \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Theta = - \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx, \quad \Theta_c = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx.$$

Since by **(H1)** \mathbf{C} is assumed to be nonsingular, the inverse mapping theorem does apply and this proves our claim.

Conclusion. We now have all the ingredients to complete the proof of Theorem A.6. Let us take $\varepsilon \in (0, \epsilon_1]$, where ϵ_1 is introduced as in Step 1 for $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$ and its neighbors. This is where we use uniformity : by Step 1, there exists $\eta \in (0, \varepsilon]$ so that, for all $(\boldsymbol{\lambda}, c) \in \mathbb{B}_{\epsilon_1}$, if $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{W}_\Xi$ is such that

$$(128) \quad \inf_{s \in \mathbb{R}} \|\mathbf{U}_0 - \underline{\mathbf{U}}(\cdot + s)\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \eta, \quad \int_0^\Xi \mathbf{U}_0 dx = \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx, \quad \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}_0) dx = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx,$$

with $\underline{\mathbf{U}}$ being the traveling profile associated with $(\mu(\boldsymbol{\lambda}, c), \boldsymbol{\lambda}, c)$, then $\mathbf{U}(t) \in \mathbb{U}_{\varepsilon/2}$ for all $t \in [0, T)$, where T is the maximal time of existence of the solution $\mathbf{U}(t)$ of (123) such that $\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0$.

By continuity of the mapping

$$\mathbf{U} \in \mathbb{H}_\Xi \mapsto (\int_0^\Xi \mathbf{U} dx, \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}) dx)$$

there exists $\zeta \in (0, \eta/2]$ such that $\|\mathbf{U}_0 - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \zeta$ implies

$$\left\| \int_0^\Xi \mathbf{U}_0 dx - \int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx \right\|_{\mathbb{R}^N} \leq \delta(\eta/2), \quad \left| \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}_0) dx - \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx \right| \leq \delta(\eta/2),$$

where δ is the function involved in Step 2. This implies by Step 2 the existence of $(\boldsymbol{\lambda}, c) \in \mathbb{B}_{\eta/2}$, its associated profile being $\underline{\mathbf{U}} \in \underline{\mathbb{U}}_{\eta/2}$ such that

$$\int_0^\Xi \underline{\mathbf{U}} dx = \int_0^\Xi \mathbf{U}_0 dx, \quad \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\underline{\mathbf{U}}) dx = \int_0^\Xi \mathcal{Q}(\mathbf{U}_0) dx.$$

Therefore, if $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{W}_\Xi$ is such that $\|\mathbf{U}_0 - \underline{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \zeta$, there exists a profile $\underline{\mathbf{U}}$ such that we have (128) — by using the triangle inequality to achieve the first condition. By Step 1 this implies that $\mathbf{U}(t) \in \mathbb{U}_{\varepsilon/2}$ for all $t \in [0, T)$, and thus $\mathbf{U}(t) \in \underline{\mathbb{U}}_\epsilon$ by the triangle inequality

again. This proves the orbital stability of the traveling wave $(x, t) \mapsto \underline{\mathbf{U}}(x - ct)$. \square

Before concentrating separately on the cases $N = 1$ and $N = 2$, let us point out a general identity on the constraint matrix and the Hessian of the abbreviated action integral.

Proposition A.11. *Let $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ be a \mathcal{C}^2 function of $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$, an open subset of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, such that the second order derivative $\Theta_{\mu\mu}$ does not vanish, and define the continuous function $\mathbf{C} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ by*

$$\mathbf{C} = \frac{\check{\nabla}\Theta_\mu \otimes \check{\nabla}\Theta_\mu}{\Theta_{\mu\mu}} - \check{\nabla}^2\Theta,$$

where $\check{\nabla}$ stands for the partial gradient with respect to all but the first independent variable μ . Then there exists a continuous mapping $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow \text{SL}_{N+2}(\mathbb{R})$ such that

$$\mathbf{P}(\text{Hess}\Theta)\mathbf{P}^\top = \left(\begin{array}{c|c} \Theta_{\mu\mu} & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{C} \end{array} \right).$$

In particular, we have

$$(129) \quad \det(\text{Hess}\Theta) = (-1)^{N+1} \Theta_{\mu\mu} \det \mathbf{C}.$$

Proof.

The matrix relation is a matter of elementary operations on rows and columns, which give the result with

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \frac{1}{\Theta_{\mu\mu}} \check{\nabla}\Theta_\mu & I_{N+1} \end{array} \right).$$

Eq. (129) is a straightforward consequence of that relation. \square

As a consequence, we see that $n(\text{Hess}\Theta) = n(-\mathbf{C})$ if $\Theta_{\mu\mu} > 0$ and $n(\text{Hess}\Theta) = n(-\mathbf{C}) + 1$ if $\Theta_{\mu\mu} < 0$. This is the key to the proof of the identity in (125), together with a Sturm–Liouville argument as we explain in the next section.

5. Examples

5.1. Quasilinear KdV

We use here the notational convention introduced before Theorem A.2, namely, for a given periodic wave solution to (qKdV) of spatial period Υ and profile \underline{v} ,

$$\theta(\mu, \lambda, c) = \int_0^\Upsilon (\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{v}_x) + c\mathcal{Q}(\underline{v}) - \lambda\underline{v} + \mu) dx,$$

$$\mathbf{a} = \text{Hess}(\mathcal{E} + c\mathcal{Q})[\underline{v}], \quad \mathcal{Q}(v) = \frac{1}{2}v^2.$$

Accordingly, we denote by ℓ the Lagrangian such that

$$\theta(\mu, \lambda, c) = \int_0^\Upsilon (\ell[\underline{v}; \lambda, c] + \mu) dx,$$

and whose second variational derivative is \mathbf{a} , that is

$$\ell[v; \lambda, c] := \mathcal{E}(v, v_x) + \frac{1}{2}cv^2 - \lambda v.$$

The assumption in **(H0)** regarding the existence and parametrization of periodic wave profiles is easily met when the energy is of the same form as in (102),

$$\mathcal{E}(v, v_x) = f(v) + \frac{1}{2} \cap(v) v_x^2,$$

with smooth functions f and \cap such that $\cap(v) > 0$. Indeed, the profile equation $\mathbb{L}\ell[\underline{v}; \lambda, c] = \mu$ then reads

$$\frac{1}{2} \cap(\underline{v}) \underline{v}_x^2 - f(\underline{v}) - \frac{1}{2} c \underline{v}^2 + \lambda \underline{v} = \mu.$$

Remarkably enough, the associated phase portrait in the plane $\{(v, \dot{v}); \dot{v} := v_x \sqrt{\cap(v)}\}$ does not depend on \cap , and consists of the level sets

$$\{(\underline{v}, \dot{\underline{v}}); \frac{1}{2} \dot{\underline{v}}^2 - f(\underline{v}) - \frac{1}{2} c \underline{v}^2 + \lambda \underline{v} = \mu\}.$$

When μ is varied, these level sets exhibit saddle points $(v, 0)$ where the potential

$$\mathscr{W}(v; \lambda, c) := -f(v) - \frac{1}{2} c v^2 + \lambda v$$

achieves a local maximum, and center points $(v, 0)$ where $\mathscr{W}(\cdot; \lambda, c)$ has a local minimum. In other words, since $f' = -p$, $(v, 0)$ is a saddle point if $p(v) - cv + \lambda = 0$, $p'(v) < c$, and a center point if $p(v) - cv + \lambda = 0$, $p'(v) > c$. In particular, if p is convex, a family of periodic wave profiles is found as soon as we have a pair made of a saddle point $(v_s, 0)$ and a center point $(v_0, 0)$ such that there exists v^s with $v_s < v_0 < v^s$ and

$$\mathscr{W}(v_s; \lambda, c) = \mathscr{W}(v^s; \lambda, c),$$

which amounts to an equal area rule on the graph of p (that is, the areas in between the graph of p and that of the affine function $v \mapsto cv - \lambda$, for $v \in [v_s, v_0]$ and for $v \in [v_0, v^s]$ are equal; this can be observed on Figures A.1 and A.2 hereafter).

By the implicit function theorem, the roots v of $p(v) - cv + \lambda$ are smoothly parametrized by (λ, c) as long as $p' - c$ does not vanish, which means that saddle points and center points are smoothly parametrized by (λ, c) , and the zeroes of $\mathscr{W}(\cdot; \lambda, c) - \mu$ are smoothly parametrized by (μ, λ, c) away from critical points $v_s(\lambda, c)$ and $v_0(\lambda, c)$. By smoothness of the flow of ODEs, this shows that periodic wave orbits found inside homoclinic loops are smoothly parametrized by (μ, λ, c) .

Let us give a more precise situation in which **(H0)** is satisfied. It is chosen in order to include many of the examples we have in mind, and in particular power laws $p(v) = v^\gamma$, $\gamma > 1$, and $p(v) = v^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. (The more complicated van der Waals law has been investigated in earlier work, see [22].) Let us point out in passing that, as far as profile equations are concerned, the special case $p(v) = v^2$, which corresponds to the ‘standard’ KdV equation, and $p(v) = v^{-2}$, which corresponds to a shallow-water type of pressure law¹², are closely related. Indeed, the profile equation for $p(v) = v^2$ readily amounts to a cubic potential \mathscr{W} , while the profile equation for $p(v) = v^{-2}$ also amounts to a cubic potential after multiplying it by \underline{v} — and modifying \cap accordingly (one should however pay attention to the fact that this operation alters the status of the parameters (μ, λ, c) , and in particular that of μ , which becomes like a Lagrange multiplier instead of being an energy level). Even without this trick, the phase portraits look similar, see Figures A.1 and A.2 to compare the two situations.

12. See §5.2.3 for an explanation.

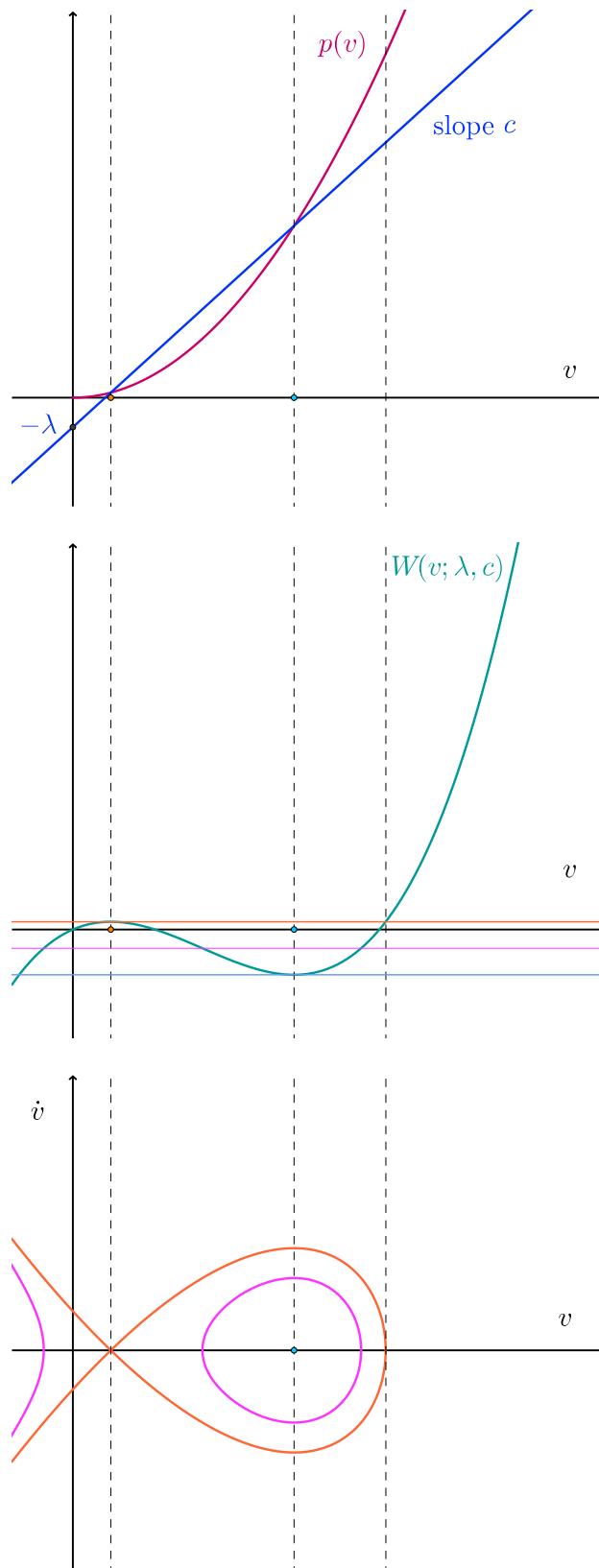


FIGURE A.1. Quadratic nonlinearity, associated potential and phase portrait.

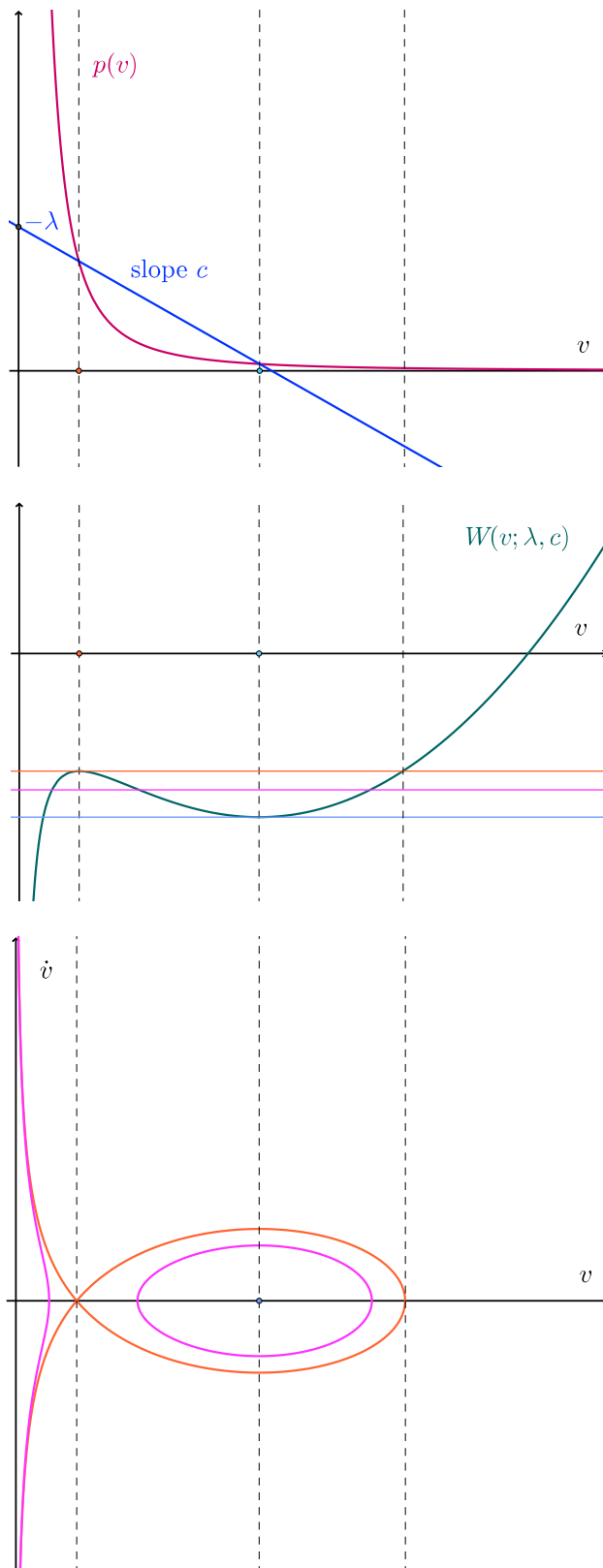


FIGURE A.2. Shallow-water type nonlinearity, associated potential and phase portrait.

Proposition A.12. Assume that $\cap : I \rightarrow (0, +\infty)$ is \mathcal{C}^2 , and that $p = -f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ is \mathcal{C}^2 with $p'' > 0$ on the open interval $I \subset \mathbb{R}$. We denote by $V : J := p'(I) \rightarrow I$ the inverse mapping of p' , and

$$\begin{aligned} l &: c \in J \mapsto cV(c) - p(V(c)), \\ l_- &: c \in J \mapsto \lim_{v \searrow \inf I} (cv - p(v)), \\ l_+ &: c \in J \mapsto \lim_{v \nearrow \sup I} (cv - p(v)), \end{aligned}$$

and consider the open sets

$$\Gamma := \{c \in J; l_-(c) < c, l_+(c) < l(c)\},$$

$$\Lambda := \{(\lambda, c) \in \mathbb{R} \times \Gamma; \max(l_-(c), l_+(c)) < \lambda < l(c)\}.$$

Then there exist \mathcal{C}^2 mappings

$$v_s : \Lambda \rightarrow \{v \in I; v < V(c)\} \quad \text{and} \quad v_0 : \Lambda \rightarrow \{v \in I; v > V(c)\}$$

such that for all $(\mu, \lambda, c) \in \Omega$,

$$\Omega := \{(\mu, \lambda, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Gamma; (\lambda, c) \in \tilde{\Lambda}, \mu \in (\mathcal{W}(v_0(\lambda, c); \lambda, c), \mathcal{W}(v_s(\lambda, c); \lambda, c))\},$$

$$\tilde{\Lambda} := \{(\lambda, c) \in \Lambda; \lim_{v \nearrow \sup I} \mathcal{W}(v; \lambda, c) > \mathcal{W}(v_s(\lambda, c); \lambda, c)\},$$

there is a unique solution \underline{v} to

$$\frac{1}{2} \cap (\underline{v}) \underline{v}_x^2 - f(\underline{v}) - \frac{1}{2} c \underline{v}^2 + \lambda \underline{v} = \mu, \quad \underline{v}_x(0) = 0,$$

that is periodic, and it is \mathcal{C}^2 in parameters (μ, λ, c) .

The proof is based on the remarks made above and some elementary analysis of the variations of $\mathcal{W}(\cdot; \lambda, c)$ for $(\lambda, c) \in \tilde{\Lambda}$, see Table A.1 below. Details are left to the reader.

v	v_1	v_s	v_2	v_0	v_3	v^s
\mathcal{W}'	+	0	-	0	+	
\mathcal{W}		μ_s		μ_0		μ_s

TABLE A.1. Variations of potential

Proposition A.12 applies in particular to

— $p(v) = v^\gamma$, $\gamma > 1$, $I = (0, +\infty)$, $J = (-\infty, 0)$, $V(c) = (c/\gamma)^{1/(\gamma-1)}$,

$$l_-(c) = 0, \quad l_+(c) = -\infty, \quad l(c) = (1/\gamma^{1/(\gamma-1)} - 1/\gamma^{\gamma/(\gamma-1)})c^{\gamma/(\gamma-1)},$$

— $p(v) = v^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, $I = (0, +\infty)$, $J = (0, +\infty)$, $V(c) = (-\gamma/c)^{1/(\gamma+1)}$,

$$l_-(c) = -\infty, \quad l_+(c) = -\infty, \quad l(c) = (\gamma^{1/(\gamma+1)} - 1/\gamma^{\gamma/(\gamma+1)})(-c)^{\gamma/(\gamma+1)}.$$

This is what we may say on **(H0)**. Regarding **(H1)**, it turns out to be equivalent to

$$\theta_{\mu\mu} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\theta) \neq 0.$$

Indeed, $\theta_{\mu\mu} \neq 0$ is exactly the first condition in **(H1)**, and as soon as it is satisfied, the equivalence between $\det \mathbf{c} \neq 0$ and $\det(\text{Hess}\theta) \neq 0$ readily follows from Proposition A.11, in which Eq. (129) reads, with our present notation (and $N = 1$),

$$\det(\text{Hess}\theta) = \theta_{\mu\mu} \det \mathbf{c}.$$

We may also view this relation as a special case of the Lewis Carroll identity [45] by writing explicitly

$$\mathbf{c} = -\frac{1}{\theta_{\mu\mu}} \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda c} & \theta_{\mu c} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \theta_{c\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \theta_{cc} & \theta_{\mu c} \\ \theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \end{pmatrix}.$$

The investigation of whether $\theta_{\mu\mu}$, the derivative of the period with respect to the value of the ODE Hamiltonian vanishes is a classical topic in Hamiltonian dynamics, see for instance the recent paper [62] and references therein (*e.g.* [110]). A criterion ensuring that this derivative is positive was given in particular by Chicone [36]. It merely reads $(\mathcal{W}/(\mathcal{W}')^2)'' > 0$, for a Hamiltonian of the form $\frac{1}{2}v_x^2 + \mathcal{W}(v)$. Despite its simple form, it is not easy to check analytically. We have chosen to rely on numerical experiments in Section 6 to rule out the critical cases in which $\theta_{\mu\mu}$ would be zero. Regarding the zeroes of the determinant of $\text{Hess}\theta$, far from distinguished limits — see [18] for a discussion of those —, we are not aware of any general analytical result. This is also investigated numerically in Section 6.

Concerning assumptions in **(H2)**, we claim — recall that the period of waves is denoted by Υ instead of Ξ here — that the space $\mathbb{H}_\Upsilon = H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$ is a convenient choice as soon as

$$\mathcal{e}(v, v_x) = f(v) + \frac{1}{2} \cap(v) v_x^2$$

with $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ and $\cap : I \rightarrow (0, +\infty)$ of class \mathcal{C}^2 on an open interval I . Indeed, in this case, the mapping

$$E : v \mapsto \int_0^\Upsilon \mathcal{e}(v, v_x) dx$$

is well-defined on the open subset of $H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$ made of v with values in I — thanks to the embedding $H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^0$ — and twice differentiable with

$$dE(v) \cdot h = \int_0^\Upsilon (f'(v)h + \frac{1}{2} \cap'(v) h v_x^2 + \cap(v) v_x h_x) dx, \quad \forall h \in H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}),$$

$$d^2E(v) \cdot (h, k) = \int_0^\Upsilon (f''(v)hk + \frac{1}{2} \cap''(v) h k v_x^2 + \cap'(v)(h k_x + k h_x) + \cap(v) h_x k_x) dx, \quad \forall h, k \in H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}),$$

for all $v \in H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$ with image in the domain of definition of f and \cap . If in addition $v \in \mathcal{C}_b^2$, as is the case for traveling profiles, we may integrate by parts in the formulas above, and recognize the variational derivatives of \mathcal{e} . As a matter of fact, if $v \in \mathcal{C}_b^2$ we find that

$$dE(v) \cdot h = \int_0^\Upsilon h \mathbb{E}\mathcal{e}[v] dx, \quad \forall h \in H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}),$$

$$d^2E(v) \cdot (h, k) = \langle \text{Hess}\mathcal{e}[v] h, k \rangle, \quad \forall h, k \in H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}),$$

where

$$\mathbb{E}\mathcal{e}[v] := \partial_v \mathcal{e} - \partial_x(\partial_{v_x} \mathcal{e}) = f'(v) + \frac{1}{2} \cap'(v) v_x^2 - \partial_x(\cap(v) v_x) \in \mathcal{C}_b^0,$$

and

$$\text{Hess}\mathcal{e}[v] h := (\partial_v^2 \mathcal{e} - \partial_x(\partial_{v_x} \mathcal{e})) h - \partial_x(h \partial_{v_x}^2 \mathcal{e}) = (f''(v) + \frac{1}{2} \cap''(v) v_x^2 - \partial_x(\cap'(v) v_x)) h - \partial_x(\cap(v) h_x)$$

belongs to $H^{-1}(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}) = (H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}))'$ for all $h \in H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$, and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the dual product. In particular, $\text{Hess}\mathcal{e}[v]$ is a *Sturm-Liouville* operator, of the form $-\partial_x K \partial_x + q$, with Υ -periodic coefficients,

$$K = \cap(v) \in \mathcal{C}_b^2, \quad 0 < K_0 \leq K \leq K_1, \\ q = f''(v) + \frac{1}{2} \cap''(v) v_x^2 - \partial_x(\cap'(v) v_x) \in \mathcal{C}_b^0, \quad \|q\|_{L^\infty} \leq \alpha_0.$$

Therefore, for all $h \in H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$, we have

$$\langle \text{Hess}\varepsilon[v]h, h \rangle + \alpha \|h\|_{L^2}^2 = \int_0^\Upsilon (Kh_x^2 + (q + \alpha)h^2) dx,$$

and if we choose for instance $\alpha = \alpha_0 + 1$, we have

$$\min(K_0, 1) \int_0^\Upsilon (h_x^2 + h^2) dx \leq \langle \text{Hess}\varepsilon[v]h, h \rangle + \alpha \|h\|_{L^2}^2 \leq \max(K_1, 2\alpha) \int_0^\Upsilon (h_x^2 + h^2) dx.$$

This shows the equivalence of norms requested in **(H2)**.

Finally, the main assumption in **(H3)** is satisfied at least in $H^s(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$ for $s > 7/2$. Indeed, the following theorem is proved in a forthcoming paper [96].

Theorem A.13. *Let s be an integer such that $s > 7/2$. If $p = -f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ is C^{s+1} and $\cap : I \rightarrow (0, +\infty)$ is C^{s+2} , then for all $\Upsilon > 0$, $v_0 \in H^s(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$, the image of v_0 being in I , there exists $T > 0$ and a unique $v \in \mathcal{C}([0, T]; H^s(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}))$ solution to (qKdV) with $\varepsilon = f(v) + \frac{1}{2} \cap (v)v_x^2$, and $v_0 \mapsto v$ is continuous.*

In the special case when \cap is constant, well-posedness is known to hold true with much lower regularity, for example $s > -1/2$ is sufficient for the classical KdV [87]. However low-regularity results rely on dispersive effects to control nonlinear terms and are thus strongly model-dependent. This is notoriously still a field of intense research¹³.

Theorem A.14. *Under the assumptions of Theorem A.13, if **(H0)** is satisfied (in particular if the assumptions of — and thus — Proposition A.12 hold true), and if, for some $(\mu, \lambda, c) \in \Omega$,*

$$(s) \quad \theta_{\mu\mu} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\theta) \neq 0, \quad n(\text{Hess}\theta) = 1,$$

is satisfied, then the periodic wave associated with (μ, λ, c) is conditionally, orbitally stable in $H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$.

Proof.

The assumptions **(H2)**-**(H3)** are implied by those of Theorem A.13, while, as explained before, **(H1)** is equivalent to

$$\theta_{\mu\mu} \det(\text{Hess}\theta) \neq 0.$$

So our main assumptions **(H0)**-**(H1)**-**(H2)**-**(H3)** are met here.

Furthermore, as announced before, the assumption that the kernel of \mathbf{a} is spanned by \underline{v}_x is automatically satisfied. In fact, Lemma A.15 stated below applies to the present operator \mathbf{a} , by using the potential $\mathscr{W} = \mathscr{W}(v; \lambda, c)$ introduced at the beginning of this section. We thus infer at the same time that the kernel of \mathbf{a} in $L^2(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$ is spanned by \underline{v}_x , and how to compute the signature of \mathbf{a} . Therefore, to apply Theorem A.6 and thus complete the proof of Theorem A.14 it suffices to check that our assumptions imply $n(\mathbf{a}) = n(\mathbf{c})$.

To do so, we can actually bypass the computation of $n(\mathbf{c})$ by using Proposition A.11. With our current notations, this algebraic proposition shows indeed that

$$n(\text{Hess}\theta) = n(-\mathbf{c}) \text{ if } \theta_{\mu\mu} > 0, \quad n(\text{Hess}\theta) = n(-\mathbf{c}) + 1 \text{ if } \theta_{\mu\mu} < 0,$$

while we know from Lemma A.15 that

$$n(\mathbf{a}) = 1 \text{ if } \theta_{\mu\mu} = \Upsilon_\mu > 0, \quad n(\mathbf{a}) = 2 \text{ if } \theta_{\mu\mu} = \Upsilon_\mu < 0.$$

¹³. Incidentally we point to the attention of the reader the attempt of keeping track of latest known results — including local-wellposedness proofs — for various dispersive equations on wiki.math.toronto.edu/DispersiveWiki/

Therefore, regardless of the sign of $\theta_{\mu\mu}$ — as long as this number is nonzero —, we have

$$n(\text{Hess}\theta) = n(-\mathbf{c}) + n(\mathbf{a}) - 1.$$

Furthermore, since the 2×2 matrix \mathbf{c} is nonsingular — as already justified —,

$$n(-\mathbf{c}) = 2 - n(\mathbf{c}),$$

so that the previous formula equivalently reads

$$n(\text{Hess}\theta) = 1 + n(\mathbf{a}) - n(\mathbf{c}).$$

This is the announced identity in (125) in the special case $N = 1$.

As a consequence, the stability index $n(\mathbf{a}) - n(\mathbf{c})$ vanishes if and only if

$$n(\text{Hess}\theta) = 1.$$

In this respect, the set of conditions in (s) are the optimal ones enabling us to apply Theorem A.6 to (qKdV). \square

Lemma A.15. *Assume that $\cap : I \rightarrow (0, +\infty)$ and $\mathcal{W} : I \rightarrow \mathbb{R}$ are \mathcal{C}^2 on some open interval I and such that the Euler–Lagrange equation $\mathbf{E}\mathcal{U}[v] = 0$ associated with the energy*

$$\mathcal{U} : (v, v_x) \mapsto \frac{1}{2} \cap(v) v_x^2 + \mathcal{W}(v)$$

admits a family of periodic solutions \underline{v} taking values in I , parametrized by the energy level $\mu = \mathbf{L}\mathcal{U}[\underline{v}]$, for $\mu \in J$, another open interval. If we denote by Υ the period of \underline{v} , and assume that Υ_μ , its derivative with respect to μ , does not vanish, then the self-adjoint differential operator $\mathbf{a} := \text{Hess}\mathcal{U}[\underline{v}]$ has the following properties :

- *the kernel of \mathbf{a} on $L^2(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$ is the line spanned by \underline{v}_x ;*
- *the negative signature $n(\mathbf{a})$ of \mathbf{a} is given by the following rule :*
 - * *if $\Upsilon_\mu > 0$ then $n(\mathbf{a}) = 1$,*
 - * *if $\Upsilon_\mu < 0$ then $n(\mathbf{a}) = 2$.*

Since

$$\mathbf{a} = -\partial_x \cap(v) \partial_x + \mathcal{W}''(v) + \frac{1}{2} \cap''(v) v_x^2 - \partial_x(\cap'(v) v_x)$$

is a *Sturm–Liouville* operator with periodic coefficients, the main argument in the proof of Lemma A.15 relies on Sturm’s oscillation theorem, as for instance in Lemma 1 in [33] (also see Proposition 5 in [32]), which concerns the case of a constant \cap . This kind of result belongs to the classical periodic Floquet/Sturm–Liouville theory that may be found in [95, Part I–Chapter II], [106, Chapter XIII–Section 16], [118, Part 1–Section 5.6] or partially in [100] – some complements in [100] are also used there and in [99] to address the question of co-periodic stability. A detailed proof is available in the appendix of an earlier version of this manuscript [19].

Note that since $\text{Hess}\theta$ is a 3×3 matrix, its determinant cannot be positive if $n(\text{Hess}\theta) = 1$. So we could equivalently replace the second condition in (s) by $\det(\text{Hess}\theta) < 0$.

If the first two conditions in (s) are readily amenable to computations, the verification of the third one, $n(\text{Hess}\theta) = 1$ demands some slightly more sophisticated algebraic work. It can be interesting to have more explicit conditions, in particular to compare with earlier results. If we assume moreover that 2×2 determinant $\theta_{\lambda\lambda}\theta_{\mu\mu} - \theta_{\lambda\mu}^2$ does not vanish, we can see by an elementary count of sign changes in the principal minors of $\text{Hess}\theta$ that (s) stems from having either one of the following sets of conditions

$$\begin{aligned} \text{(s1)} \quad \theta_{\mu\mu} > 0, & \quad \begin{vmatrix} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\theta) < 0, \\ \text{(s2)} \quad \theta_{\mu\mu} < 0, & \quad \begin{vmatrix} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{vmatrix} < 0, \quad \det(\text{Hess}\theta) < 0. \end{aligned}$$

For convenience, the reader may refer to Table A.5 in Appendix 7, in which **(s1)** corresponds to the second and third rows, and **(s2)** to the 7th. From the same table we see that, in terms of the constraint matrix **c**, **(s1)** corresponds to $n(\mathbf{c}) = 1$, and **(s2)** to $n(\mathbf{c}) = 2$. Note however that our conditions in **(s)** are slightly more general than the prescription of (**(s1)** or **(s2)**), in that they do not require $\theta_{\lambda\lambda}\theta_{\mu\mu} - \theta_{\lambda\mu}^2 \neq 0$.

In the special case when \cap is constant, Theorem A.14 was essentially already known in the case $\theta_{\lambda\lambda}\theta_{\mu\mu} - \theta_{\lambda\mu}^2 \neq 0$, and proved in a slightly different manner in [33]. Indeed, orbital stability with respect to co-periodic perturbations is essentially a consequence of [33, Theorem 1], under the assumption

$$\theta_{\mu\mu} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\theta) \neq 0, \quad n(\text{Hess}\theta) = 1,$$

which is equivalent to (**(s1)** or **(s2)**). An earlier, similar result was shown by Johnson [77], under the more restrictive assumption

$$(130) \quad \theta_{\mu\mu} > 0, \quad \begin{vmatrix} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{vmatrix} < 0, \quad \det(\text{Hess}\theta) < 0.$$

We should mention that these results by Bronski *et al* dealing with (gKdV) — and not its quasilinear version (qKdV) — yield genuine orbital stability, and not only conditional orbital stability. This is because the Cauchy problem for (gKdV) is much better understood than for (qKdV) with a nonconstant \cap .

Remarkably enough, Table A.5 in Appendix 7 shows that the matrix $\text{Hess}\theta$ cannot be nonnegative. Indeed, by our identity on negative signatures (see Eq. (126)), we must have $n(\mathbf{a}) \geq n(\mathbf{c})$, so that the — purely algebraic — situation in the first row of Table A.5 cannot occur.

5.2. Euler–Korteweg

5.2.1. Eulerian coordinates *vs* mass Lagrangian coordinates

Before investigating how to apply Theorem A.6 to the Euler–Korteweg system, let us come back to the equivalence between its formulation in Eulerian coordinates (EKE), and its formulation in mass Lagrangian coordinates (EKL). This equivalence works as long as we deal with states away from vacuum, and more precisely, with densities ρ that are bounded and bounded by below by some positive constant. It is based on the fact that the continuity equation

$$(131) \quad \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0$$

is equivalent — for $x \in \mathbb{R}$, and t in some interval too — to the existence of a function $Y = Y(x, t)$ such that $\partial_x Y = \rho$ and $\partial_t Y = -\rho u$. Denoting by $(y = Y(x, t), s = t)$ the new coordinates obtained this way, and introducing

$$v(y, s) = 1/\rho(x, t), \quad w(y, s) = u(x, t),$$

we see that (EKE) and (EKL) are equivalent provided that $\mathcal{E}(\rho, \rho_x) = \rho \mathcal{E}(v, v_y)$. (Here we focus on smooth solutions, but this equivalence is also known to hold true for weak solutions when \mathcal{E} depends only on ρ , that is, for the usual Euler equations.) The change of coordinates $(x, t, \rho, u) \mapsto (y, s, v, w)$ is clearly nonlinear, and also nonlocal since the new ‘independent variable’ y actually depends on the integration of the dependent variables ρ and ρu . Nevertheless, there is also an equivalence between travelling wave solutions of (EKE) and (EKL). As shown in [14], $(\rho, u) = (\underline{\rho}, \underline{u})(x - \sigma t)$ is a travelling wave solution to (EKE) if and only if $(v, w) = (\underline{v}, \underline{w})(y + jt)$ is a travelling wave solution to (EKE), along with

$$\rho(\underline{u} - \sigma) \equiv j, \quad \rho(x) = 1/\underline{v}(\underline{Y}(x)), \quad \underline{u}(x) = \underline{w}(\underline{Y}(x)), \quad \underline{Y}'(x) = \rho(x),$$

or, equivalently,

$$\underline{w} - j\underline{v} \equiv \sigma, \quad \underline{v}(y) = 1/\rho(\underline{X}(y)), \quad \underline{w}(y) = \underline{u}(\underline{X}(y)), \quad \underline{X}'(y) = \underline{v}(y).$$

In particular, if (ρ, \underline{u}) is Ξ -periodic then $(\underline{v}, \underline{w})$ is Υ -periodic with

$$\Upsilon = \int_0^\Xi \rho(x) dx, \quad \Xi = \int_0^\Upsilon \underline{v}(y) dy.$$

Furthermore, we can see that the abbreviated action integral does not depend on the chosen formulation. Before checking this, let us perform preliminary work on profile equations. The system (EKE) fits our abstract framework with

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}[\mathbf{U}] = \mathcal{E}(\rho, \rho_x) + \frac{1}{2}\rho u^2, \quad \mathcal{Q}(\mathbf{U}) = -\rho u,$$

so that the profile equations in (105)-(106) can be written as

$$(132) \quad \begin{cases} (\partial_\rho \mathcal{E})(\rho, \rho_x) - ((\partial_{\rho_x} \mathcal{E})(\rho, \rho_x))_x + \frac{1}{2}u^2 - \sigma u = -\lambda, \\ \rho u - \sigma \rho = j, \\ \rho_x (\partial_{\rho_x} \mathcal{E})(\rho, \rho_x) - \mathcal{E}(\rho, \rho_x) - \frac{1}{2}\rho u^2 + \sigma \rho u - \lambda \rho + j u = \mu. \end{cases}$$

The notational choice for the Lagrange multiplier in the right-hand side of the second equation here above is dictated by the relation we already have in mind, and we denote by $-\lambda$ the first Lagrange multiplier for convenience, because it is going to be identified with the energy level in the EKL profile equations. As a matter of fact, it results from Theorem 1 in [14] that the profile equations in Eulerian coordinates, as written above, are equivalent to

$$(133) \quad \begin{cases} (\partial_v \mathcal{E})(\underline{v}, \underline{v}_y) - ((\partial_{v_y} \mathcal{E})(\underline{v}, \underline{v}_y))_y - j \underline{w} = -\mu, \\ \underline{w} - j \underline{v} = \sigma, \\ \underline{v}_y (\partial_{v_y} \mathcal{E})(\underline{v}, \underline{v}_y) - \mathcal{E}(\underline{v}, \underline{v}_y) - \frac{1}{2}\underline{w}^2 + j \underline{v} \underline{w} - \mu \underline{v} + \sigma \underline{w} = \lambda. \end{cases}$$

We recognize here the profile equations for (EKL), which fits our abstract framework with

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}[\mathbf{U}] = \mathcal{E}(v, v_y) + \frac{1}{2}w^2, \quad \mathcal{Q}(\mathbf{U}) = vw.$$

So there is an almost perfect symmetry in these profile equations, where we can see that j and σ exchange their roles, as well as λ and μ , when we go from (EKE) to (EKL) or *vice versa*. This is why, even though this might seem confusing at first glance, we avoid introducing any additional piece of notation. The fact that we have a single abbreviated action integral for both (EKE) and (EKL) is now clear because the change of variables is such that $dy = \rho dx$, or equivalently $dx = \underline{v} dy$, so that

$$(134) \quad \begin{aligned} \Theta(\mu, \lambda, j, \sigma) &:= \int_0^\Xi (\mathcal{E}(\rho, \rho_x) + \frac{1}{2}\rho u^2 - \sigma \rho u + \lambda \rho - j u + \mu) dx \\ &= \int_0^\Upsilon (\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{v}_y) + \frac{1}{2}\underline{w}^2 - j \underline{v} \underline{w} + \mu \underline{v} - \sigma \underline{w} + \lambda) dy. \end{aligned}$$

The third of profile equations in (132) and (133) show that Θ is indeed the abbreviated action for both of them. In addition, we have the following correspondence between the ‘abstract parameters’ (μ, λ, c) , as introduced in profile equations (105)-(106) and used in the abbreviated action (108), and the ‘practical parameters’ $(\mu, \lambda, j, \sigma)$ for (EKE) and (EKL).

abstract	μ	λ_1	λ_2	c
EKE	μ	$-\lambda$	j	σ
EKL	λ	$-\mu$	σ	$-j$

TABLE A.2. Notation for wave parameters

Remark A.16. On the one hand, the occurrence of minus signs in Table A.2 is not a real issue for applying our theory to (EKE) and (EKL), because both the quadratic form associated with $\text{Hess}\Theta$ and the one associated with the constraint matrix \mathbf{C} are invariant under the symmetry $\nu \mapsto -\nu$ in any dependent variable ν of Θ , and these quadratic forms are, together with the derivatives Ξ_μ and Υ_λ , the only objects which govern our stability criteria. On the other hand, the fact that the roles of parameters change when we go from (EKL) to (EKE) will have to be addressed carefully.

The invariance of spectral stability properties when going from Eulerian coordinates to mass Lagrangian coordinates, even though it seems very natural, is not obvious either as the original conjugacy occurs through the change of coordinates $(x, t, \rho, u) \mapsto (y, s, v, w)$ that is *nonlinear* and *nonlocal*. Nonetheless, there is a kind of ‘conjugacy’ between systems that are obtained by linearizing (EKE) and (EKL), in moving frames, about (ρ, \underline{u}) and $(\underline{v}, \underline{w})$ respectively. This in turn enables us to prove that the existence of an unstable mode in either one of these systems implies so for the other. In order to point out this conjugacy, we first reformulate (EKE) and (EKL) in moving frames associated with the waves. Let σ and j be fixed, and consider the new dependent variables

$$q := \rho(u - \sigma) - j, \quad z := w - jv - \sigma,$$

and the new independent variables

$$\xi := x - \sigma t, \quad \zeta := y + js.$$

Then the system (EKE) is equivalent to

$$(EKEj) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = 0, \\ \partial_t q + \partial_x \Phi = 0, \quad \Phi = \Phi(\rho, \rho_x, \rho_{xx}, q; j) := (q + j)^2 / \rho + \rho \mathbf{E}\mathcal{E}[\rho] + \mathbf{L}\mathcal{E}[\rho], \end{cases}$$

where ∂_t now denotes the partial derivative at constant ξ , and for convenience we have substituted again x for ξ . The second equation in (EKEj) here above comes from the conservation law for the impulse, as in (103), which reduces here to

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \rho \mathbf{E}\mathcal{E}[\rho] + \mathbf{L}\mathcal{E}[\rho]) = 0,$$

from which we have subtracted σ times the continuity equation (131). Similarly, the system (EKL) is found to be equivalent to

$$(EKLj) \quad \begin{cases} \partial_s v = \partial_y z, \\ \partial_s z = \partial_y \Psi, \quad \Psi = \Psi(v, v_y, v_{yy}, z; j) := \mathbf{E}\mathcal{E}[v] - 2jz - j^2 v. \end{cases}$$

Here above, ∂_s stands for the partial derivative at constant ζ , and for convenience we have substituted again y for ζ . Of course, as is the case for (EKE) and (EKL), systems (EKEj) and (EKLj) are equivalent, as long as smooth solutions with positive and bounded densities ρ and volumes v are concerned and provided that $\mathcal{E}(\rho, \rho_x) = \rho \mathcal{E}(v, v_y)$. More precisely, the change of coordinates $(x, t, \rho, q) \mapsto (y, s, v, w)$ is given by

$$dy = \rho dx - q dt, \quad s = t, \quad v(y, s) = 1/\rho(x, t), \quad z(y, s) = q(x, t)/\rho(x, t),$$

or equivalently by

$$dx = v dy + z ds, \quad t = s, \quad \rho(x, t) = 1/v(y, s), \quad q(x, t) = z(y, s)/v(y, s).$$

By construction of (EKE j) and (EKL j), the travelling wave solutions to (EKE) and (EKL) considered above become *stationary* solutions to (EKE j) and (EKL j), which read $(\rho, 0)$ and $(\underline{v}, 0)$ respectively. We can now show the following.

Theorem A.17. *Assume that ρ and \underline{v} are smooth functions on \mathbb{R} , bounded and bounded by below by positive constants, related by*

$$\rho(x) = 1/v(\underline{Y}(x)) = \underline{Y}'(x),$$

and such that $(\rho, 0)$ and $(\underline{v}, 0)$ are stationary solutions to (EKE j) and (EKL j) respectively, for some real number j . Then by linearizing (EKE j) and (EKL j) about $(\rho, 0)$ and $(\underline{v}, 0)$ respectively, we receive systems whose spectra are identical.

Proof.

Let us simply call $(\ell E j)$ and $(\ell L j)$ the linearized systems of (EKE j) and (EKL j) about $(\rho, 0)$ and $(\underline{v}, 0)$ respectively, and denote them in abstract form as

$$\begin{aligned} (\ell E j) \quad \partial_t \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{q} \end{pmatrix} &= \mathcal{L}_E \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{q} \end{pmatrix}, \\ (\ell L j) \quad \partial_s \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \mathcal{L}_L \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Our aim is to show that the differential operators \mathcal{L}_E and \mathcal{L}_L are isospectral. By translation invariance of $(\ell E j)$ and $(\ell L j)$, we already know that $\nu = 0$ is an eigenvalue of both \mathcal{L}_E and \mathcal{L}_L , associated eigenvectors being $(\rho_x, 0)^\top$ and $(\underline{v}_y, 0)^\top$ respectively. From now on, we take a nonzero complex number ν , and aim at showing that it belongs to the spectrum of \mathcal{L}_E if and only if it belongs to the spectrum of \mathcal{L}_L . By spectrum of the operator \mathcal{L}_E , which is a differential operator in x with Ξ -periodic coefficients, we mean the whole spectrum in the space of square integrable functions, which is known to be the collection of complex numbers ν such that there is a nontrivial $(\dot{\rho}, \dot{q})$ satisfying

$$(135) \quad \mathcal{L}_E \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{q} \end{pmatrix}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\dot{\rho}, \dot{q})(x + \Xi) = e^{i\alpha}(\dot{\rho}, \dot{q})(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Here above, α is called a Floquet exponent. Note that the spectrum of \mathcal{L}_E in the space of square integrable Ξ -periodic functions corresponds to those ν for which $\alpha = 0$. This is the case for $\nu = 0$, since $(\rho_x, 0)$ is Ξ -periodic. Of course, the spectrum of \mathcal{L}_L enjoys a similar characterization, which is the existence of a nontrivial (\dot{v}, \dot{z}) such that

$$(136) \quad \mathcal{L}_L \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\dot{v}, \dot{z})(y + \Upsilon) = e^{i\alpha}(\dot{v}, \dot{z})(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

The idea is to show a one-to-one correspondence between nontrivial $(\dot{\rho}, \dot{q})$ satisfying (135) and nontrivial (\dot{v}, \dot{z}) satisfying (136), for the very same values of (ν, α) with $\nu \neq 0$. This can be done by first returning to nonlinear systems.

Solving the original, nonlinear system (EKE j) for some perturbation of ρ that is parametrized by say ϵ as initial data, we receive a family of solutions $(\rho, q) = (\rho, q)(x, t; \epsilon)$ of (EKE j) parametrized by ϵ such that

$$(\rho, q)(x, t; 0) = (\rho(x), 0),$$

and that $(\dot{\rho}, \dot{q}) : (x, t) \mapsto (\rho_\epsilon, q_\epsilon)(x, t; 0)$ solves $(\ell E j)$. Furthermore, introducing $Y = Y(x, t; \epsilon)$ such that $Y(x, t; 0) = \underline{Y}(x)$ and $\partial_x Y = \rho$, $\partial_t Y = -q$, we have

$$(137) \quad \rho(x, t; \epsilon) = 1/v(Y(x, t; \epsilon), t; \epsilon), \quad q(x, t) = z(Y(x, t; \epsilon), t; \epsilon)/v(Y(x, t; \epsilon), t; \epsilon)$$

where $(v, z) = (v, z)(y, s; \omega)$ is a family of solutions to (EKLj) parametrized by ω . (We use here different notations for parameters ϵ and ω for the same reason as for times t and s , that is, in order to avoid confusion about partial derivatives.) This implies that

$$(v, z)(y, s; 0) = (\underline{v}(y), 0),$$

and that $(\dot{v}, \dot{q}) : (y, s) \mapsto (v_\omega, q_\omega)(y, s; 0)$ solves (ℓLj). Assume moreover that the family $(\rho, q)(\cdot, 0; \epsilon)$ is chosen such that $(\dot{\rho}_0, \dot{q}_0) = (\rho_\epsilon, q_\epsilon)(\cdot, 0; 0)$ satisfies (135). Then

$$(\dot{\rho}, \dot{q}) = e^{\nu t}(\dot{\rho}_0, \dot{q}_0),$$

and we claim that, similarly,

$$(\dot{v}, \dot{z}) = e^{\nu s}(\dot{v}_0, \dot{z}_0),$$

with $(\dot{v}_0, \dot{z}_0) = (v_\omega, z_\omega)(\cdot, 0; 0)$ satisfying (136).

In order to prove that claim, let us first note that, by the chain rule applied to (137),

$$(138) \quad \dot{\rho}(x, t) = -(\dot{v}(\underline{Y}(x), t) + \dot{Y}(x, t) v_y(\underline{Y}(x))) / v(\underline{Y}(x))^2, \dot{q}(x, t) = \dot{z}(\underline{Y}(x), t) / v(\underline{Y}(x)),$$

where $\dot{Y}(x, t) := Y_\epsilon(x, t; 0)$. Now, by differentiating $\partial_x Y = \rho$, $\partial_t Y = -q$, we get that $\dot{Y}_x = \dot{\rho}$, $\dot{Y}_t = -\dot{q}$. By the first row in ($\ell E j$) and the fact that $(\dot{\rho}, \dot{q})$ depends on t as a linear function of $e^{\nu t}$, we have $\nu \dot{\rho} = -\dot{q}_x$, and therefore, we find that $\dot{Y} = -\dot{q} / \nu$. This relation is the key to the claimed conjugacy, because it enables us to rewrite (138) as

$$(139) \quad \dot{v}(y, s) = -\underline{v}(y)^2 \dot{\rho}(\underline{X}(y), s) + \dot{q}(\underline{X}(y), s) v_y(y) / \nu, \dot{z}(y, s) = \underline{v}(y) \dot{q}(\underline{X}(y), s),$$

with $\underline{X} = \underline{Y}^{-1}$. Equation (139) obviously implies that

$$\begin{aligned} \dot{v}(y, s) &= e^{\nu s} (-\underline{v}(y) \dot{\rho}_0(\underline{X}(y)) + \dot{q}_0(\underline{X}(y)) v_y(y) / \nu) = e^{\nu s} \dot{v}_0(y), \\ \dot{z}(y, s) &= e^{\nu s} (\underline{v}(y) \dot{q}_0(\underline{X}(y))) = e^{\nu s} \dot{z}_0(y). \end{aligned}$$

In addition, we observe that \dot{v}, \dot{z} given by (139) in terms of $\underline{v}, \underline{X}, \dot{\rho}, \dot{q}$, and ν , are bounded functions of y if $\dot{\rho}, \dot{q}$ are bounded functions of x — because \underline{v} and its derivatives are bounded. Furthermore, \dot{v}, \dot{z} are Υ -periodic in y if $\dot{\rho}, \dot{q}$ are Ξ -periodic in x — because $\underline{X}(y + \Upsilon) - \underline{X}(y) = \Xi$, and more generally, if $(\dot{\rho}, \dot{q})(x + \Xi, t) = e^{i\alpha}(\dot{\rho}, \dot{q})(x, t)$ for all x, t , then $(\dot{v}, \dot{z})(y + \Upsilon, s) = e^{i\alpha}(\dot{v}, \dot{z})(y, s)$ for all y, s .

Similar computations can be performed in the other way round. Indeed, we can find (\dot{v}, \dot{z}) solving (EKLj) from $(\dot{\rho}, \dot{q})$ solving (EKEj) through the following formula, analogous to (138),

$$(140) \quad \dot{v}(y, s) = -(\dot{\rho}(\underline{X}(y), s) + \dot{X}(y, s) \rho_x(\underline{X}(y))) / \rho(\underline{X}(y))^2, \dot{z}(y, s) = \dot{q}(\underline{X}(y), s) / \rho(\underline{X}(y)),$$

and the key relation is $\dot{X} = \dot{z} / \nu$. Using in addition that $\rho = 1 / \underline{v}$, $\rho_x / \rho^2 = -v_y / v$, we thus see that, as expected, (140) is equivalent to (139). \square

Remark A.18. Theorem A.17 shows in particular that the operators just obtained by linearizing (EKE) and (EKL) in moving frames, but in the ‘original’ dependent variables (ρ, u) and (v, w) ,

$$\mathcal{A}_E = -D_x \begin{pmatrix} j/\rho & \rho \\ \text{Hess} \mathcal{E}[\rho] & j/\rho \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_L = D_y \begin{pmatrix} -j & 1 \\ \text{Hess} \mathcal{E}[v] & -j \end{pmatrix},$$

are *isospectral*. Furthermore, we can infer from its proof the relationship between the eigenfunctions of \mathcal{A}_E and \mathcal{A}_L associated with nonzero eigenvalues. Indeed, recalling that

$$q := \rho(u - \sigma) - j, \quad z := w - jv - \sigma,$$

we have

$$\dot{q} = (j/\rho)\dot{\rho} + \rho\dot{u}, \quad \dot{z} = \dot{w} - j\dot{v},$$

which yields, by substitution in (139),

$$\dot{v} = \underline{v}^2(-1 + j\underline{L})\dot{\rho} + \underline{L}\dot{u}, \quad \dot{w} = j^2\underline{v}^2\underline{L}\dot{\rho} + (1 + j\underline{L})\dot{u}, \quad \underline{L} := \frac{v_y}{\nu\underline{v}}$$

(where we have omitted to write the independent variables for simplicity). The practical ‘conjugacy’ between \mathcal{A}_E and \mathcal{A}_L is thus far from being trivial.

Another natural question is the relationship between the Hessians of the constrained energies

$$\mathbf{A}_E = \begin{pmatrix} \text{Hess}^{\mathcal{E}}[\rho] & j/\rho \\ j/\rho & \rho \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{A}_L = \begin{pmatrix} \text{Hess}^{\mathcal{E}}[v] & -j \\ -j & 1 \end{pmatrix}.$$

Interestingly, both of these matrix-valued operators are linked in a rather simple manner to *scalar* operators. Indeed, using notation as above,

$$\dot{q} = (j/\rho)\dot{\rho} + \rho\dot{u}, \quad \dot{z} = \dot{w} - j\dot{v},$$

we see that

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{u} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}_E \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \dot{\rho} \mathbf{a}_E \dot{\rho} + \dot{q}^2/\rho, \quad \mathbf{a}_E := \text{Hess}^{\mathcal{E}}[\rho] - j^2/\rho^3,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}_L \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \dot{v} \mathbf{a}_L \dot{v} + \dot{z}^2, \quad \mathbf{a}_L := \text{Hess}^{\mathcal{E}}[v] - j^2.$$

These expressions have the striking consequence in terms of negative signatures that

$$(141) \quad \mathfrak{n}(\mathbf{A}_E) = \mathfrak{n}(\mathbf{a}_E), \quad \mathfrak{n}(\mathbf{A}_L) = \mathfrak{n}(\mathbf{a}_L).$$

Both \mathbf{a}_E and \mathbf{a}_L are *scalar* Sturm–Liouville operators with periodic coefficients. We thus have a simple criterion to compute their negative signature (see Lemma A.15 stated in Section 5.1).

Regarding the relationship between the scalar operators \mathbf{a}_E and \mathbf{a}_L , one may check that

$$\rho \mathbf{a}_E \dot{\rho} + \underline{K}(\rho_x \dot{\rho}_x - \rho_{xx} \dot{\rho}) = -\mathbf{a}_L \dot{v}, \quad \underline{K} := \partial_{\rho_x}^2 \mathcal{E}[\rho],$$

or equivalently

$$\underline{v} \mathbf{a}_L \dot{v} + \underline{\kappa}(v_y \dot{v}_y - v_{yy} \dot{v}) = -\mathbf{a}_E \dot{\rho}, \quad \underline{\kappa} := \partial_{v_x}^2 \mathcal{E}[v],$$

for

$$\dot{v}(\underline{Y}(x)) = -\dot{\rho}(x)/\rho(x)^2,$$

which amounts to substituting 0 for \dot{X} in (140). These relations are — fortunately — consistent with the fact that $\mathbf{a}_E \rho_x$ and $\mathbf{a}_L v_y$ vanish simultaneously, but they do not show a relationship between the signatures of \mathbf{a}_E and \mathbf{a}_L . This is actually no surprise because we expect that it is the stability indices

$$\mathfrak{l}_E := \mathfrak{n}(\mathbf{A}_E) - \mathfrak{n}(\mathbf{C}_E) = \mathfrak{n}(\mathbf{a}_E) - \mathfrak{n}(\mathbf{C}_E) \quad \text{and} \quad \mathfrak{l}_L := \mathfrak{n}(\mathbf{A}_L) - \mathfrak{n}(\mathbf{C}_L) = \mathfrak{n}(\mathbf{a}_L) - \mathfrak{n}(\mathbf{C}_L)$$

which vanish simultaneously (see Remark A.19 here after for a variational point of view on this question), and the negative signatures of the constraint matrices \mathbf{C}_E and \mathbf{C}_L have no a priori reason to coincide. Indeed, recalling from (134) the definition of $\Theta(\mu, \lambda, j, \sigma)$, and interpreting the abstract definition of the constraint matrix \mathbf{C} in **(H1)** with the present

notation (see Remark A.16), we find that

$$(142) \quad \mathbf{C}_E = -\frac{1}{\Theta_{\mu\mu}} \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\lambda\lambda} & \Theta_{\mu\lambda} \\ \Theta_{\lambda\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\lambda j} & \Theta_{\mu j} \\ \Theta_{\lambda\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\lambda\sigma} & \Theta_{\mu\sigma} \\ \Theta_{\lambda\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \Theta_{j\lambda} & \Theta_{\mu\lambda} \\ \Theta_{j\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{jj} & \Theta_{\mu j} \\ \Theta_{j\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{j\sigma} & \Theta_{\mu\sigma} \\ \Theta_{j\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\sigma\lambda} & \Theta_{\mu\lambda} \\ \Theta_{\sigma\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\sigma j} & \Theta_{\mu j} \\ \Theta_{\sigma\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\sigma\sigma} & \Theta_{\mu\sigma} \\ \Theta_{\sigma\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \end{pmatrix},$$

$$(143) \quad \mathbf{C}_L = -\frac{1}{\Theta_{\lambda\lambda}} \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\mu\mu} & \Theta_{\lambda\mu} \\ \Theta_{\mu\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\mu\sigma} & \Theta_{\lambda\sigma} \\ \Theta_{\mu\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\mu j} & \Theta_{\lambda j} \\ \Theta_{\mu\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\sigma\mu} & \Theta_{\lambda\mu} \\ \Theta_{\sigma\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\sigma\sigma} & \Theta_{\lambda\sigma} \\ \Theta_{\sigma\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\sigma j} & \Theta_{\lambda j} \\ \Theta_{\sigma\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \Theta_{j\mu} & \Theta_{\lambda\mu} \\ \Theta_{j\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{j\sigma} & \Theta_{\lambda\sigma} \\ \Theta_{j\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{jj} & \Theta_{\lambda j} \\ \Theta_{j\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| \end{pmatrix}.$$

Obviously, the matrices \mathbf{C}_E and \mathbf{C}_L do not involve exactly the same minors of $\text{Hess}\Theta$, and may therefore have different negative signatures — according to our algebraic computations in Appendix 7, it might happen that $n(\mathbf{C}_L) = 2$ and $n(\mathbf{C}_E) = 0$.

Remark A.19. From (134) we see that

$$\Theta(\mu, \lambda, j, \sigma) = \mathcal{F}_E[\underline{\rho}, \underline{u}; \mu, \lambda, j, \sigma] = \mathcal{F}_L[\underline{v}, \underline{w}; \mu, \lambda, j, \sigma]$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_E[\underline{\rho}, \underline{u}; \mu, \lambda, j, \sigma] &:= \int_0^\Xi (\mathcal{E}(\rho, \rho_x) + \frac{1}{2}\rho u^2 - \sigma\rho u + \lambda\rho - ju + \mu) dx, \\ \mathcal{F}_L[\underline{v}, \underline{w}; \mu, \lambda, j, \sigma] &= \int_0^\Upsilon (\mathcal{E}(v, v_y) + \frac{1}{2}w^2 - jvw + \mu v - \sigma w + \lambda) dy. \end{aligned}$$

The nullity of the stability index \mathfrak{l}_E is a necessary condition for $\mathcal{F}_E[\cdot; \mu, \lambda, j, \sigma]$ to have a local minimum at $(\underline{\rho}, \underline{u})$ under the constraints

$$(144) \quad \begin{aligned} \int_0^\Xi dx &= \Xi, \quad \int_0^\Xi \rho(x) dx = \int_0^\Xi \underline{\rho}(x) dx, \\ \int_0^\Xi u(x) dx &= \int_0^\Xi \underline{u}(x) dx, \quad \int_0^\Xi (\rho u)(x) dx = \int_0^\Xi (\underline{\rho} \underline{u})(x) dx. \end{aligned}$$

Similarly, the nullity of the stability index \mathfrak{l}_L is a necessary condition for $\mathcal{F}_L[\cdot; \mu, \lambda, j, \sigma]$ to have a local minimum at $(\underline{v}, \underline{w})$ under the constraints

$$(145) \quad \begin{aligned} \int_0^\Upsilon dy &= \Upsilon, \quad \int_0^\Upsilon v(y) dy = \int_0^\Upsilon \underline{v}(y) dy, \\ \int_0^\Upsilon w(y) dy &= \int_0^\Upsilon \underline{w}(y) dy, \quad \int_0^\Upsilon (vw)(y) dy = \int_0^\Upsilon (\underline{v} \underline{w})(y) dy. \end{aligned}$$

We have inserted the apparently trivial, first condition in (144) and (145) in order to point out that these sets of constraints are actually equivalent under the change of variables

$$\rho(x) = 1/v(Y(x)), \quad u(x) = w(Y(x)), \quad Y'(x) = \rho(x),$$

which happens to also ensure that

$$\mathcal{F}_L[\underline{v}, \underline{w}; \mu, \lambda, j, \sigma] = \mathcal{F}_E[\underline{\rho}, \underline{u}; \mu, \lambda, j, \sigma].$$

This is why we may expect \mathfrak{l}_E and \mathfrak{l}_L to vanish simultaneously.

What we can actually prove is the equality of the indices \mathfrak{l}_E and \mathfrak{l}_L under some ‘generic assumptions’.

Theorem A.20. *Assume that (ρ, \underline{u}) and (\underline{v}, w) are periodic solutions to, respectively, (132) and (133), depending smoothly on the parameters $(\mu, \lambda, j, \sigma)$, as well as their periods Ξ and Υ . With notation introduced earlier, if $\Theta_{\mu\mu} \neq 0$, $\Theta_{\lambda\lambda} \neq 0$, and the matrices \mathbf{C}_E and \mathbf{C}_L are nonsingular then we have the identity*

$$n(\text{Hess}\Theta) - 2 = n(\mathbf{A}_E) - n(\mathbf{C}_E) = n(\mathbf{A}_L) - n(\mathbf{C}_L).$$

Proof.

As already noticed, we have

$$l_E := n(\mathbf{A}_E) - n(\mathbf{C}_E) = n(\mathbf{a}_E) - n(\mathbf{C}_E) \quad \text{and} \quad l_L := n(\mathbf{A}_L) - n(\mathbf{C}_L) = n(\mathbf{a}_L) - n(\mathbf{C}_L).$$

Furthermore, by Proposition A.11, we have

$$\begin{aligned} n(\text{Hess}\Theta) &= n(-\mathbf{C}_E) \text{ if } \Theta_{\mu\mu} > 0, & n(\text{Hess}\Theta) &= n(-\mathbf{C}_E) + 1 \text{ if } \Theta_{\mu\mu} < 0, \\ n(\text{Hess}\Theta) &= n(-\mathbf{C}_L) \text{ if } \Theta_{\lambda\lambda} > 0, & n(\text{Hess}\Theta) &= n(-\mathbf{C}_L) + 1 \text{ if } \Theta_{\lambda\lambda} < 0. \end{aligned}$$

We claim that, by Lemma A.15, these relations imply

$$n(\text{Hess}\Theta) = n(-\mathbf{C}_E) + n(\mathbf{a}_E) - 1 = n(-\mathbf{C}_L) + n(\mathbf{a}_L) - 1,$$

from which we arrive at our final formula — similarly as in the proof of Theorem A.14 — by observing that for the 3×3 , nonsingular matrices \mathbf{C}_E and \mathbf{C}_L we have

$$n(-\mathbf{C}_E) = 3 - n(\mathbf{C}_E), \quad n(-\mathbf{C}_L) = 3 - n(\mathbf{C}_L).$$

It just remains to check that Lemma A.15 does imply that

$$(146) \quad n(\mathbf{a}_L) = 1 \text{ if } \Theta_{\lambda\lambda} > 0, \quad n(\mathbf{a}_L) = 2 \text{ if } \Theta_{\lambda\lambda} < 0,$$

$$(147) \quad n(\mathbf{a}_E) = 1 \text{ if } \Theta_{\mu\mu} > 0, \quad n(\mathbf{a}_E) = 2 \text{ if } \Theta_{\mu\mu} < 0.$$

This a matter of adapting notation, and checking the relationship between the energy levels for the vector-valued profile equations and for the reduced, scalar profile equations.

Eliminating \underline{w} from the first equation in (133), we can view it as an Euler–Lagrange equation for the energy

$$\mathcal{W}(v, v_y) := \mathcal{E}(v, v_y) - \frac{1}{2}j^2v^2 - (-\mu + j\sigma)v,$$

and eliminating \underline{w} from the third equation in (133), we find that the corresponding energy level is

$$\mathbb{L}\mathcal{W}[v] = \lambda - \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Therefore $\Theta_{\lambda\lambda} = \Upsilon_\lambda$ is indeed the partial derivative of the period of \underline{v} with respect to energy level, and since $\mathbf{a}_L = \text{Hess}\mathcal{W}[v] = \text{Hess}\mathcal{E}[v] - j^2$, Lemma A.15 applies and shows (146).

We proceed similarly to prove (147). By eliminating \underline{u} from the first equation in (132) we find

$$\mathbb{E}\mathcal{E}[\rho] + \frac{j^2}{2\rho^2} = -\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2,$$

which is the Euler–Lagrange equation associated with the energy

$$\mathcal{W}(\rho, \rho_x) := \mathcal{E}(\rho, \rho_x) - j^2/(2\rho) - (-\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2)\rho,$$

and by eliminating \underline{u} from the third equation in (132), we see that the corresponding energy level is

$$\mathbb{L}\mathcal{W}[\rho] = \mu - j\sigma.$$

Therefore $\Theta_{\mu\mu} = \Xi_\mu$ is the partial derivative of the period of ρ with respect to energy level, and since $\mathbf{a}_E = \text{Hess}\mathcal{E}[\rho] - j^2/\rho^3$, Lemma A.15 applies and shows (147). \square

5.2.2. Connexion with quasilinear KdV equations

As already mentioned in the proof of Theorem A.20, the profile equations in (133) for traveling wave solutions $(v, w) = (\underline{v}, \underline{w})(y + jt)$ to (EKL) reduce, after elimination of \underline{w} to

$$\mathbb{E}\mathcal{e}[\underline{v}] - j^2 \underline{v} + \mu - j\sigma = 0,$$

which is nothing but the governing ODE for the profile of traveling wave solutions $v = \underline{v}(x + j^2t)$ to (qKdV), and the Euler–Lagrange equation associated with

$$\ell[v; j\sigma - \mu, -j^2] = \mathcal{e}(v, v_y) - \frac{1}{2}j^2v^2 + (\mu - j\sigma)v,$$

the Lagrangian defined in Section 5.1. Similarly, the velocity \underline{w} can be eliminated from the abbreviated action integral

$$\Theta(\mu, \lambda, j, \sigma) = \int_0^\Upsilon (\mathcal{e}(\underline{v}, \underline{v}_y) + \frac{1}{2}\underline{w}^2 - j\underline{v}\underline{w} + \mu\underline{v} - \sigma\underline{w} + \lambda) dy$$

for (EKL). This yields

(148)

$$\Theta(\mu, \lambda, j, \sigma) = \int_0^\Upsilon (\mathcal{e}(\underline{v}, \underline{v}_y) - \frac{1}{2}j^2\underline{v}^2 + (\mu - j\sigma)\underline{v} + \lambda - \frac{1}{2}\sigma^2) dy = \theta(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2, j\sigma - \mu, -j^2),$$

where θ is the abbreviated action integral associated with the Υ -periodic traveling wave solutions $v = \underline{v}(x + j^2t)$ to (qKdV), as in Section 5.1. Therefore, by the chain rule, $\text{Hess}\Theta(\mu, \lambda, j, \sigma)$ can be expressed in terms of $\nabla\theta$ and $\text{Hess}\theta$ evaluated at $(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2, j\sigma - \mu, -j^2)$. This will be used in §5.2.3 below to compare the stability criteria for (EKL) and (qKdV).

5.2.3. Orbital stability in the Euler–Korteweg system

Let us now examine in which situation we may apply Theorem A.6 to the Euler–Korteweg system. We consider energies as in (102), that is

$$\mathcal{E} = F(\rho) + \frac{1}{2} \mathfrak{m}(\rho) \rho_x^2,$$

or equivalently,

$$e = f(v) + \frac{1}{2} \cap(v) v_y^2,$$

with

$$F(\rho) = \rho f(1/\rho), \quad \mathfrak{m}(\rho) = \rho^{-5} \cap(1/\rho),$$

with $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ and $\cap : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ of class \mathcal{C}^2 , hence also $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ and $\mathfrak{m} : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ are of class \mathcal{C}^2 . Even though many others are possible, we give now the most classical kind of nonlinearities that we may think of :

- *Shallow-water* pressure law : $F(\rho) = \frac{1}{2}\rho^2$, or equivalently $f(v) = 1/(2v)$, which gives $p(v) = 1/(2v^2)$; then the EKE system is a dispersive modification of the Saint-Venant equations for shallow water flows, in which the ‘pressure’ term is indeed known to be of the form $p(\rho) = \frac{1}{2}\rho^2$;
- *NLS capillarity* : $\mathfrak{m}(\rho) = 1/(4\rho)$; then the EKE system is the fluid formulation¹⁴ of the Non Linear Schrödinger equation

$$(\text{NLS}) \quad i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\partial_x^2\psi = \psi g(|\psi|^2),$$

with $g(\rho) = F'(\rho)$. In the shallow-water case, $g(\rho) = \rho$, which corresponds to the *cubic* NLS.

- *Semilinear* EKE : \mathfrak{m} constant.
- *Semilinear* EKL : \cap constant.

14. Via the *Madelung* transform : $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\varphi}$, $\varphi_x = u$.

We warn here again the reader that, as explained in §5.2.1, our notation from the abstract setting 4.1 have to be adapted to parameters $(\mu, \lambda, j, \sigma)$ used to define the action in (134) for both (EKL) and (EKE) (see in particular Table A.2).

By the connexion made in §5.2.2 between periodic waves in (EKL) and (qKdV), and the one-to-one correspondence between periodic waves in (EKL) and (EKE) recalled in §5.2.1, we have a good knowledge of situations in which **(H0)** is satisfied for both (EKL) and (EKE). Proposition A.12 exemplifies one such situation. More precisely, under the assumptions of that proposition, **(H0)** holds true for both (EKL) and (EKE) for $(\mu, \lambda, j, \sigma)$ in the preimage by

$$(\mu, \lambda, j, \sigma) \mapsto (\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2, j\sigma - \mu, -j^2)$$

of the open set Ω defined in Proposition A.12. Other possibilities, with various families of periodic waves, are considered in [22].

Taking **(H0)** for granted, let us look at our other main assumptions **(H1)**-**(H2)**-**(H3)**.

The abstract, nondegeneracy assumptions in **(H1)** become, for (EKE)

$$\Theta_{\mu\mu} \neq 0, \quad \det \mathbf{C}_E \neq 0,$$

and for (EKL)

$$\Theta_{\lambda\lambda} \neq 0, \quad \det \mathbf{C}_L \neq 0.$$

Both of them can be reformulated in more convenient way by using Proposition A.11, in which Eq. (129) applied to (EKE) and (EKL) gives

$$(149) \quad \Theta_{\mu\mu} \det \mathbf{C}_E = \Theta_{\lambda\lambda} \det \mathbf{C}_L = -\det(\text{Hess}\Theta).$$

(This identity may also be checked from the expressions of \mathbf{C}_E and \mathbf{C}_L , given in (142) and (143) respectively, and the Lewis Carroll identity [45].) In particular, Proposition A.11 implies that, if $\Theta_{\mu\mu} \Theta_{\lambda\lambda} = \Xi_\mu \Upsilon_\lambda$ is nonzero, the matrices \mathbf{C}_L and \mathbf{C}_E are simultaneously nonsingular, and this happens when $\text{Hess}\Theta$ itself is nonsingular. In other words, **(H1)** amounts to

$$\Theta_{\mu\mu} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) \neq 0$$

for (EKE), and

$$\Theta_{\lambda\lambda} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) \neq 0$$

for (EKL).

Regarding **(H2)**, we claim that $\mathbb{H}_\Upsilon := H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$ and $\mathbb{H}_\Xi := H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ do the job, respectively for (EKL) and (EKE). For the former, this comes from a straightforward addition to what is done in §5.1, since the Hamiltonian functional is just

$$(v, w) \mapsto \int_0^\Upsilon \mathcal{e}(v, v_y) dy + \frac{1}{2} \int_0^\Upsilon w^2 dy = E[v] + \frac{1}{2} \|w\|_{L^2}^2.$$

For the latter, the Hamiltonian functional is

$$(\rho, u) \mapsto \int_0^\Xi \mathcal{H}(\rho, u, \rho_x) dx = \int_0^\Xi \mathcal{E}(\rho, \rho_x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\Xi \rho u^2 dx.$$

The first part of this functional can be handled exactly as before, since \mathcal{e} and \mathcal{E} have the same abstract form. By this, we mean that the mapping $\rho \mapsto \int_0^\Xi \mathcal{E}(\rho, \rho_x) dx$ is \mathcal{C}^2 on $H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$, and for Ξ -periodic $\rho \in \mathcal{C}_b^2$ with values in $(0, +\infty)$,

$$\rho \mapsto (\langle \text{Hess}\mathcal{E}[\rho]\rho, \rho \rangle + \alpha \|\rho\|_{L^2}^2)^{1/2}$$

defines an equivalent norm on $H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$, provided that α is large enough. Furthermore,

$$\left\langle \text{Hess}\mathcal{H}[\rho, u] \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \text{Hess}\mathcal{E}[\rho]\rho, \rho \rangle + \int_0^\Xi (\rho u^2 + 2u \rho_x u) dx,$$

and

$$\int_0^\Xi (\rho u^2 + 2\underline{u}\rho u) dx + \alpha \|\rho\|_{L^2}^2 = \int_0^\Xi \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} \cdot \underline{A} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} dx,$$

where

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \alpha & \underline{u} \\ \underline{u} & \rho u \end{pmatrix}$$

is bounded, and positive for α large enough, its upper and lower bound being uniform when the image of (ρ, \underline{u}) is in a compact set of $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. This proves that **(H2)** holds true.

Finally, in view of earlier work [15, 16] on the Cauchy problem for (EKL) and (EKE) in one space dimension, we claim that **(H3)** is satisfied in $H^{s+1} \times H^s$ for $s > 3/2$.

Theorem A.21. *Let $s > 3/2$. If $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ and $\cap : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ are \mathcal{C}^{s+2} , then, for all $\Upsilon > 0$, $(v_0, w_0) \in H^{s+1}(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}) \times H^s(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$, $v_0 > 0$, there exists $T > 0$ and a unique $(v, w) \in \mathcal{C}([0, T]; H^{s+1}(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}) \times H^s(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}))$ solution to (EKL) with $e = f(v) + \frac{1}{2} \cap(v)v_y^2$, and $(v_0, w_0) \mapsto (v, w)$ is continuous.*

Theorem A.22. *Let $s > 3/2$. If $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ and $\mathfrak{m} : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ are \mathcal{C}^{s+2} , then, for all $\Xi > 0$, $(\rho_0, u_0) \in H^{s+1}(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times H^s(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$, $\rho_0 > 0$, there exists $T > 0$ and a unique $(\rho, u) \in \mathcal{C}([0, T]; H^{s+1}(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times H^s(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))$ solution to (EKE) with $\mathcal{E} = F(\rho) + \frac{1}{2} \mathfrak{m}(\rho)\rho_x^2$, and $(\rho_0, u_0) \mapsto (\rho, u)$ is continuous.*

We thus have all the ingredients to apply Theorem A.6 to (EKL) and (EKE).

Theorem A.23. *Under the assumptions of Theorem A.21, if **(H0)** is satisfied, then for a wave profile $(\underline{v}, \underline{w})$ at which we have*

$$(\mathbf{S}_L) \quad \Theta_{\lambda\lambda} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) \neq 0, \quad \mathfrak{n}(\text{Hess}\Theta) = 2,$$

the associated periodic wave solution to (EKL) is conditionally, orbitally stable in $H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$.

Proof.

Our assumptions include **(H0)**, imply **(H3)** by Theorem A.21, and are designed to also meet **(H1)** and **(H2)** in the way explained earlier. Furthermore, the kernel of \mathbf{A}_L is spanned by $(\underline{v}_y, \underline{w}_y)^\top$ because the kernel of \mathbf{a}_L is spanned by \underline{v}_y , which follows from the first statement in Lemma A.15, applied as in the proof of Theorem A.20. Moreover, by Theorem A.20 we have

$$\mathfrak{n}(\mathbf{A}_L) - \mathfrak{n}(\mathbf{C}_L) = \mathfrak{n}(\text{Hess}\Theta) - 2,$$

which equals zero by assumption. This means that Theorem A.6 does apply here. \square

Theorem A.24. *Under the assumptions of Theorem A.22, if **(H0)** is satisfied, then for a wave profile $(\underline{\rho}, \underline{u})$ at which we have*

$$(\mathbf{S}_E) \quad \Theta_{\mu\mu} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) \neq 0, \quad \mathfrak{n}(\text{Hess}\Theta) = 2,$$

the associated periodic wave solution to (EKE) is conditionally, orbitally stable in $H^1(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Upsilon\mathbb{Z})$.

Proof.

It is of course very similar to that of Theorem A.23. Our assumptions ensure that **(H0)**-**(H1)**-**(H2)**-**(H3)** are all met. The kernel of \mathbf{A}_E is spanned by $(\underline{\rho}_x, \underline{u}_x)^\top$ because the one

of \mathbf{a}_E is spanned by ρ_x , which follows from the first statement in Lemma A.15, applied as in the proof of Theorem A.20. The latter also shows that

$$\mathbf{n}(\mathbf{A}_L) - \mathbf{n}(\mathbf{C}_L) = \mathbf{n}(\text{Hess}\Theta) - 2 = 0$$

by assumption. So we can apply Theorem A.6 here too. \square

We may now take advantage of the connexion between (EKL) and (qKdV) pointed out in §5.2.2 to compare the stability criteria in Theorems A.13, A.21, A.22.

As shown in Appendix 7, we have

$$(150) \quad \det(\text{Hess}\Theta) = (2\theta_c\theta_\mu - \theta_\lambda^2)(\theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2) - 4j^2\theta_\mu \det(\text{Hess}\theta),$$

$$(151) \quad \mathbf{n}(\text{Hess}\Theta) = 1 + \mathbf{n}(\text{Hess}\theta - (2\theta_c\theta_\mu - \theta_\lambda^2)/(4j^2\theta_\mu)J), \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

where the derivatives of θ are all evaluated at $(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2, j\sigma - \mu, -j^2)$. The fact that \underline{v} is a nonconstant periodic function of period $\theta_\mu = \Upsilon$ implies at the same time that $\theta_\mu > 0$ and

$$2\theta_c\theta_\mu - \theta_\lambda^2 = \Upsilon \int_0^\Upsilon \underline{v}^2 dy - \left(\int_0^\Upsilon \underline{v} dy \right)^2 > 0$$

by the Cauchy–Schwarz inequality. Therefore, the (qKdV) stability conditions in (s) automatically imply, by (150), that $\det(\text{Hess}\Theta) > 0$ if $j \neq 0$ and $(\theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2) \leq 0$. In this situation, we also have

$$\mathbf{n}(\text{Hess}\theta - (2\theta_c\theta_\mu - \theta_\lambda^2)/(4j^2\theta_\mu)J) = \mathbf{n}(\text{Hess}\theta),$$

since the involved 3×3 matrices have the same first two principal minors, and their determinants have the same sign. So the third condition in (s) implies $\mathbf{n}(\text{Hess}\Theta) = 2$ by (151). In fact, as soon as $j \neq 0$ and

$$\det(\text{Hess}\theta) \det(\text{Hess}\theta - (2\theta_c\theta_\mu - \theta_\lambda^2)/(4j^2\theta_\mu)J) > 0,$$

or equivalently — by Eq. (150) —

$$\det(\text{Hess}\theta) \det(\text{Hess}\Theta) < 0,$$

Eq. (151) implies that the stability conditions in (S_L) are equivalent to those in (s), evaluated at $(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2, j\sigma - \mu, -j^2)$. We may summarize this in the following statements.

Theorem A.25. *Under the assumptions of Theorems A.14 and A.23, if*

$$j \neq 0, \quad \Theta_{\mu\mu} \neq 0, \quad \det(\text{Hess}\theta) \det(\text{Hess}\Theta) < 0,$$

then

$$\mathbf{n}(\text{Hess}\theta) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}(\text{Hess}\Theta) = 2.$$

If this is the case then the periodic traveling wave $(v, w) = (\underline{v}, \underline{w})(y + jt)$ is an orbitally stable solution to (EKL) and $v = \underline{v}(y + j^2t)$ is an orbitally stable solution to (qKdV).

Corollary A.26. *Under the assumptions of Theorems A.14 & A.23, if $j \neq 0$ and*

$$(s2) \quad \theta_{\mu\mu} < 0, \quad \begin{vmatrix} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{vmatrix} < 0, \quad \det(\text{Hess}\theta) < 0,$$

holds true at $(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2, j\sigma - \mu, -j^2)$, then the periodic traveling wave $(v, w) = (\underline{v}, \underline{w})(y + jt)$ is an orbitally stable solution to (EKL) and $v = \underline{v}(y + j^2t)$ is an orbitally stable solution to (qKdV).

6. Numerical investigation of specific examples

In this section, we focus on the quasilinear Korteweg-de Vries equation (qKdV) and on both versions of the Euler-Korteweg system, (EKL) or (EKE), with an energy as in (102). In all cases, the traveling profiles \underline{v} are governed by an equation of the form

$$(152) \quad \frac{1}{2} \cap(\underline{v}) \dot{\underline{v}}^2 + \mathcal{W}(\underline{v}; \lambda, c) = \mu,$$

where c is linked to the speed of the wave, and λ, μ are basically constants of integration. For (qKdV), notation in (152) are perfectly consistent with those used in §5.1. Indeed, c is exactly the speed of the wave, λ is the Lagrange multiplier in the profile equation, μ is the energy level resulting from the integrated version of this profile equation, and the potential is

$$\mathcal{W}(v; \lambda, c) = -f(v) - \frac{1}{2}cv^2 + \lambda v.$$

We warn the reader once more, however, that the abstract notation for the parameters in (152) has to be interpreted differently for the EK system. Indeed, as should be clear from the discussion in §5.2.2, the profile equations for (EKL) are not readily of the form (152), which is a *reduced profile equation*, obtained only after eliminating the velocity profile \underline{w} . This yields the following table of correspondence (Table A.3) between the ‘practical’ parameters $(\mu, \lambda, j, \sigma)$ of the EKL wave profile $(\underline{v}, \underline{w})$ introduced in §5.2.1, and the abstract parameters (μ, λ, c) in (152) — which can also be checked from the relation between the EK action and the qKdV action in (148).

abstract	μ	λ	c
qKdV	μ	λ	c
EKL	$\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2$	$j\sigma - \mu$	$-j^2$

TABLE A.3. Parameters in the reduced profile equation

In fact, the computations performed in the proof of Theorem A.20 also show that the reduced profile equation for (EKE) has an abstract form as in (152), up to adapting notation. The correspondence is summarized in the next table (Table A.4).

equation	energy level	potential \mathcal{W}
qKdV	μ	$\mathcal{W}(v) = -f(v) - \frac{1}{2}cv^2 + \lambda v$
EKL	$\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2$	$\mathcal{W}(v) = -f(v) + \frac{1}{2}j^2v^2 + (j\sigma - \mu)v$
EKE	$\mu - j\sigma$	$\mathcal{W}(\rho) = -F(\rho) + \frac{1}{2}j^2/\rho + (\frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda)\rho$

TABLE A.4. Energy level and potential in the reduced profile equation

We find it convenient to keep the ‘abstract’ notation in (152) for the discussion that follows.

6.1. Methodology

We wish to investigate numerically the conditions for orbital, coproperiodic stability that are derived in Section 4, and applied to (qKdV) in §5.1, and to (EKL), (EKE) in §5.2.1-5.2.2. Equation (152) is obviously solvable by separation of variables, which readily gives the action

$$(153) \quad \Theta = \oint \cap(v) \dot{v} dv = \oint \sqrt{2 \cap(v)(\mu - \mathcal{W}(v; \lambda, c))} dv,$$

and the period

$$(154) \quad \Upsilon = \oint \frac{dv}{\dot{v}} = \oint \frac{dv}{\sqrt{2(\mu - \mathcal{W}(v; \lambda, c))/\cap(v)}}.$$

To actually compute these integrals, we first need the points v_2, v_3 , as denoted in Table A.1, at which \mathcal{W} achieves the energy level μ and in between which \mathcal{W} is less than μ , the point v_2 being the trough of the wave, and v_3 , the crest. These points we can compute numerically by means of, *e.g.* *Newton's* method. This is what we have done, with a *relative tolerance* $\varepsilon = 10^{-10}$. Then we have computed numerically

$$\Theta = 2 \int_{v_2}^{v_3} \sqrt{2\cap(v)(\mu - \mathcal{W}(v; \lambda, c))} dv,$$

and also

$$\Upsilon = 2 \int_{v_2}^{v_3} \frac{dv}{\sqrt{2(\mu - \mathcal{W}(v; \lambda, c))/\cap(v)}},$$

by standard numerical integration techniques¹⁵. Some care is needed to handle properly the square root singularity at endpoints. This has been done by first making the desingularizing change of variables

$$v = \frac{v_3 + v_2}{2} + \frac{v_3 - v_2}{2} \sin \omega$$

(already used for instance in [32, 22]). Then every Newton–Cotes formulae that we tried worked well, and gave very close results, with a step size $\Delta\omega = 10^{-4}$. We just had to preferably use an open Newton–Cotes formula to avoid too much sensitivity on the numerical error made on the preliminary computations of v_2 and v_3 .

Finally, we have computed approximations of the second order derivatives of the action by means of finite differences. To avoid any confusion, the qKdV action is denoted by θ in what follows — as in §5.1, and the notation Θ is reserved for the EK action. The second order derivatives of θ and Θ are computed in the natural, ‘abstract’ variables, respectively (μ, λ, c) and $(\mu, \lambda_1, \lambda_2, c)$, up to referring to Table A.2 for computing derivatives of the EK action with respect to the ‘concrete’ parameters $(\mu, \lambda, j, \sigma)$. In both cases, we have used a 9-point stencil for the computation of those second order discrete derivatives, with a step size $\Delta\nu$ which turned out to be rather severely limited by the earlier steps — especially the numerical integration step. An additional difficulty is that the *condition number* of the Hessian of the action is most often very large.

The tolerance $\varepsilon = 10^{-10}$ and the integration step size $\Delta\omega = 10^{-4}$ are basically kept constant in the results presented below, whereas the finite difference step $\Delta\nu$ varies from place to place.

One important observation to validate our numerical approach is that, for some specific nonlinearities which correspond to completely integrable PDEs, we have access to an explicit formula for some characteristics of the Hessian of the action. To be more precise, we know from [21, Proposition 2] that the *characteristic velocities* of the *modulated* equations are those of a matrix known in terms of the Hessian of the action, the velocity and the period of periodic waves. For (qKdV), this matrix reads

$$\mathbf{d} := c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (\text{Hess}\theta)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Here, the trapezoidal rule. We have also tried *Simpson's* rule without any significant benefit.

and for (EKL), it is

$$\mathbf{D} = -j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (\text{Hess}\Theta)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

So, in cases when these characteristic velocities are known through ‘explicit’ formulas — which involve elliptic functions —, we can compare them with the eigenvalues of \mathbf{d} and \mathbf{D} that we obtain through our numerical approach. This is what we have done for the ‘standard’ Korteweg-de Vries (KdV) equation ($p(v) = \frac{1}{2}v^2$, $\cap \equiv 1$) and for the Euler–Korteweg version of the cubic NLS equation ($p(v) = 1/(2v^2)$, $\cap(\rho) = 1/(4\rho)$, that is, $\cap(v) = 1/(4v^4)$), by using the expressions of characteristic velocities collected in the book by Kamchatnov [82] (chapter 3.5, p. 184 and chapter 5.1, p. 238) and in [76, § 2.2].

Remark A.27. This testing against explicit formulas incidentally enabled us to find out that the numerical computations displayed in [22] were, to some extent, corrupted, because of inconsistent choices for the finite difference step $\Delta\nu$ and for the integration step size $\Delta\omega$ — in fact, $\Delta\nu$ was taken too small.

6.2. A few numerical results

6.2.1. Benchmarks

Let us start with the KdV case (with actually $p(v) = 3v^2$, for convenience). On Figure A.3 hereafter, we have plotted the condition number of $\text{Hess}\theta$ for a reasonable range of periods Υ , almost going down to the harmonic period — that is, the small amplitude limit — as well as the relative error of its determinant when compared to what is expected from the explicit formulas mentioned above. As we can see, it is for periods close to the harmonic period that the condition number of $\text{Hess}\theta$ is the highest, and the error on the determinant reaches the highest values, around 0.12%. Were the step size $\Delta\nu$ diminished, this instability phenomenon would worsen.

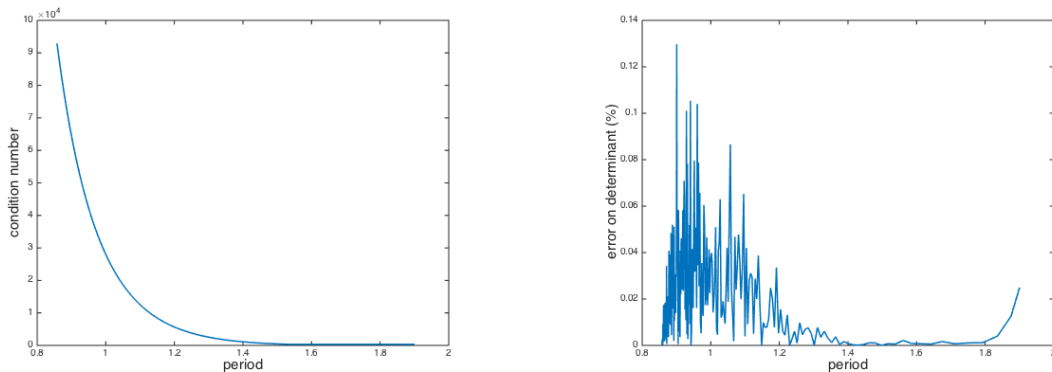


FIGURE A.3. Left : condition number of $\text{Hess}\theta$ as a function of the period Υ for KdV, with $c = 60$, $\lambda = -60$ kept fixed. Right : relative error on $\det \text{Hess}\theta$. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.005$.

Figure A.4 hereafter displays, with the same parameter values as in Figure A.3, the minors that encode the orbital stability condition in Theorem A.14, namely $m_1 = \theta_{\mu\mu}$, $m_2 = \theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2$ and $m_3 = \det \text{Hess}\theta$.

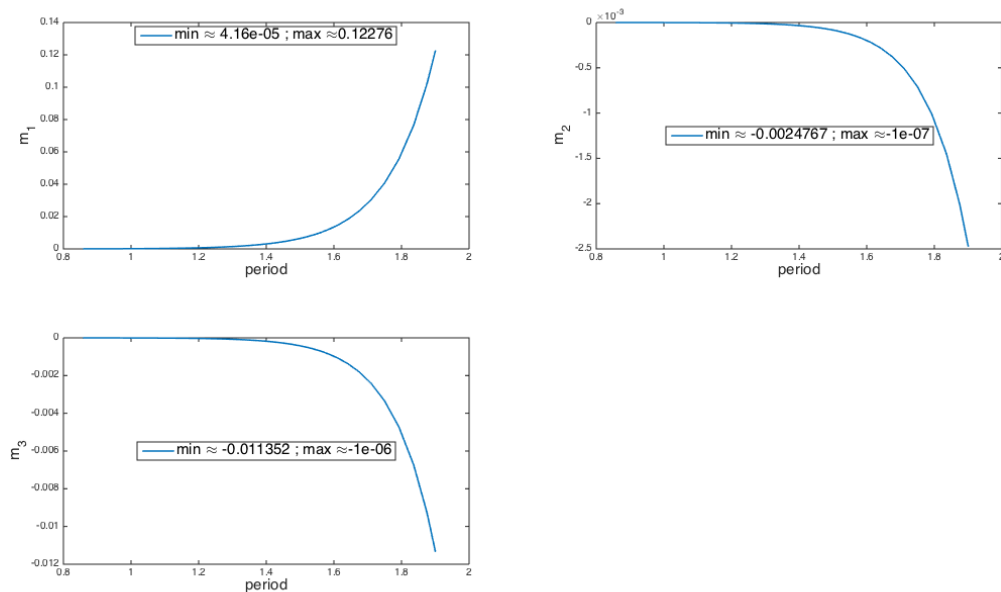


FIGURE A.4. Upper left : $m_1 = \theta_{\mu\mu}$; upper right : $m_2 = \theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2$; and lower left : $m_3 = \det \text{Hess}\theta$, all of them as functions of the period Υ for KdV with $c = 60$, $\lambda = -60$ kept fixed. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.005$.

By looking at extreme values of those minors given in boxes, or by zooming on and eye-checking the parts of their curves that look closest to zero, we recover the signs that confirm orbital stability for KdV. More precisely, we find that the signs of minors of $\text{Hess}\theta$ are as in the third row on Table A.5,

$$\theta_{\mu\mu} > 0, \quad \begin{vmatrix} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{vmatrix} < 0, \quad \det(\text{Hess}\theta) < 0,$$

(which is (130), corresponding to the set of conditions found by Johnson in [77]).

Let us now consider the *cubic* NLS nonlinearity, whose numerical behavior differs. Again, on Figure A.5 below, we have plotted the condition number of $\text{Hess}\Theta$ and the relative error of its determinant.

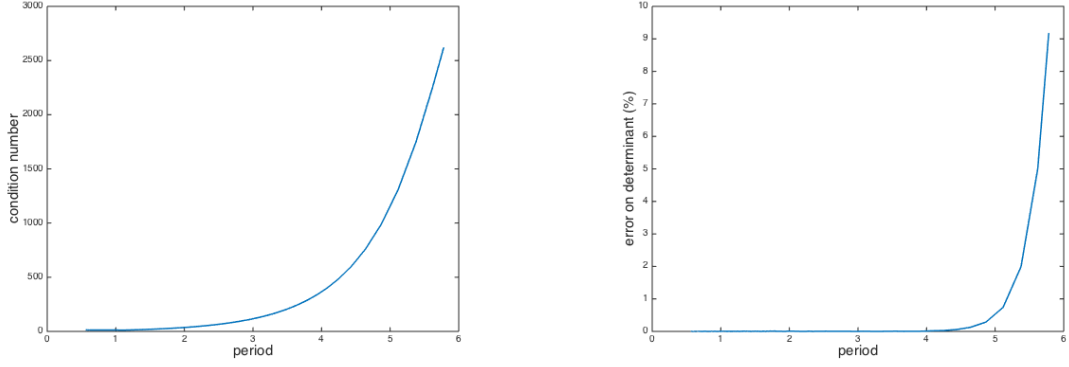


FIGURE A.5. Left : condition number of $\text{Hess}\Theta$ as a function of the period for NLS, with $j = 1$, $\sigma = 0$, $\mu = -2.5$ kept fixed. Right : relative error on $\det \text{Hess}\Theta$. Finite difference step size : $\Delta\nu = 10^{-5}$.

Here the most important numerical problems come from large periods, that is, when we approach the soliton limit. The condition number gets quite large, and the error on the determinant obviously blows up in this limit. Nevertheless, we can plot the minors encoding orbital stability as long as the period is not too large. We first plot, in Figure A.6, the four minors of $\text{Hess}\Theta$ encoding the stability conditions in $(\mathbf{S}_{\mathbf{L}})$ (in Theorem A.23), with in particular $M_1 = \Theta_{\lambda\lambda}$ and $M_4 = \det(\text{Hess}\Theta)$, and then also look at the missing one for checking the stability conditions in $(\mathbf{S}_{\mathbf{E}})$ (in Theorem A.24), namely $\Theta_{\mu\mu}$.

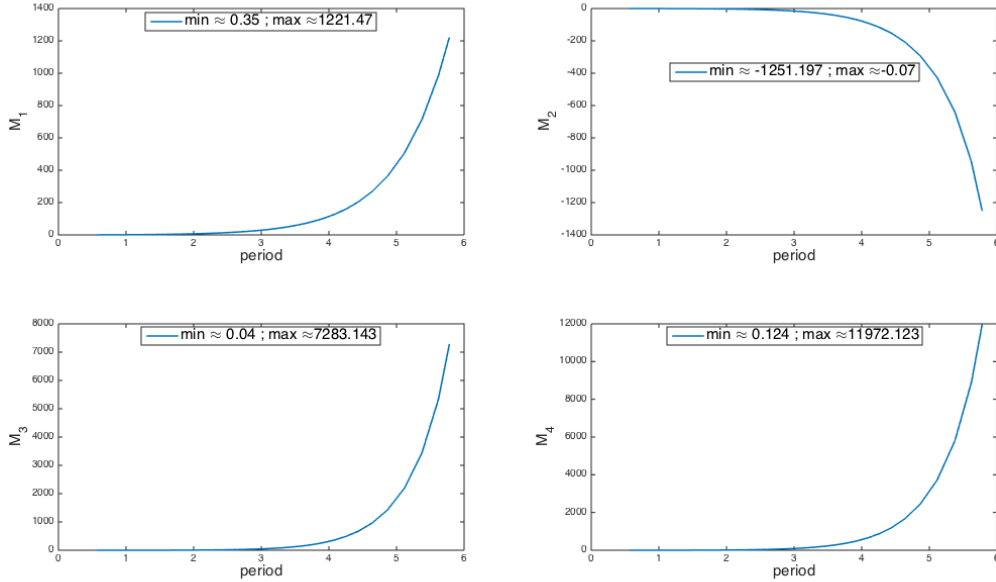


FIGURE A.6. The four principal minors : $M_1 = \Theta_{\lambda\lambda}$ (upper left) ; $M_2 = \Theta_{\mu\mu}\Theta_{\lambda\lambda} - \Theta_{\lambda\mu}^2$ (upper right) ; M_3 (lower left) ; and $M_4 = \det(\text{Hess}\Theta)$ (lower right), as a function of the period for NLS case, with $j = 1$, $\sigma = 0$, $\mu = -2.5$ kept fixed. Finite difference step size : $\Delta\nu = 10^{-5}$.

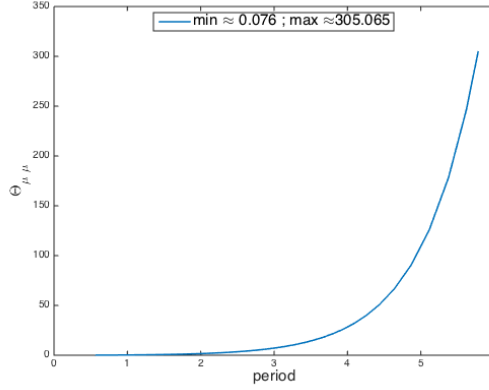


FIGURE A.7. $\Theta_{\mu\mu}$ as a function of the period with the same data as in Figure A.6.

Again, the signs are not easily visible for periods approaching the small amplitude limit, but the extreme values of minors displayed in boxes show that

$$\Theta_{\mu\mu} > 0, \quad \Theta_{\lambda\lambda} > 0, \quad \det(\text{Hess}\Theta) > 0, \quad n(\text{Hess}\Theta) = 2,$$

(the latter being a consequence of Sylvester's rule and the fact that there are exactly two sign changes in the sequence of minors, since $M_2 < 0$ and all the others are positive), which imply that both (\mathbf{S}_L) and (\mathbf{S}_E) are satisfied. This confirms, as known from [55], that cubic NLS periodic waves are orbitally stable, including in the mass Lagrangian coordinates of the fluid formulation of NLS.

6.2.2. More qKdV test cases

Let us now discuss (qKdV), with the aim of deriving new stability results in non integrable cases. We set again $\cap \equiv 1$ — which means we actually concentrate on (gKdV) — and we look at a pressure law given by

$$p(v) = e(\gamma + 1)v^\gamma, \quad \gamma \geq 2, \quad e = \pm 1.$$

The minus sign is usually referred to as the defocusing case. Its introduction is in fact irrelevant if γ is an even integer, because in this case the symmetry $(x, t, v) \mapsto (-x, -t, -v)$ drives back the minus sign to a plus sign in (gKdV).

The case $\gamma = 2$ corresponds to (KdV), while the plus sign with $\gamma = 3$ corresponds to what is known as the *modified* KdV equation (mKdV). This is another completely integrable case, for which the results are qualitatively similar to those of KdV as displayed on Figures A.8 - A.9 here after. According to [4, Theorem 5.2], *dnoidal* waves should be orbitally stable. We chose our parameters in order to observe this particular family of waves (see Figure 2.1 in [77]), and we find indeed the expected stability, the minors of $\text{Hess}\theta$ satisfying again (130).

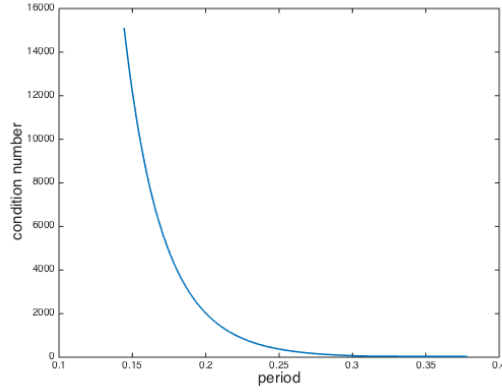


FIGURE A.8. Condition number of $\text{Hess}\theta$ as a function of the period for focusing (mKdV), that is $\gamma = 3$ and $e = 1$, with $c = 1000$ and $\lambda = -500$ kept fixed. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.05$.

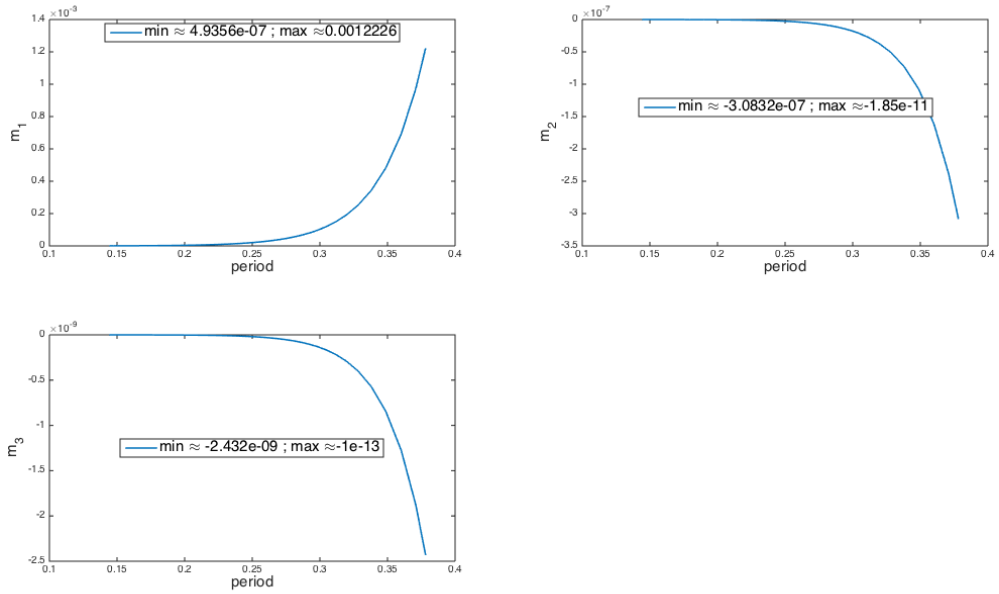


FIGURE A.9. Upper left : $m_1 = \theta_{\mu\mu}$; upper right : $m_2 = \theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2$; and lower left : $m_3 = \det \text{Hess}\theta$, as a function of the period for focusing (mKdV), with the same data as in Figure A.8.

When going to the defocusing mKdV case (with a minus sign in the pressure and $\gamma = 3$), we observe on Figure A.11 that the intermediate minor m_2 has the opposite sign, compared to what happens for the focusing mKdV. However, the negative signature of $\text{Hess}\theta$ remains equal to one, and this confirms orbital stability for the defocusing mKdV equation, as expected from [44].

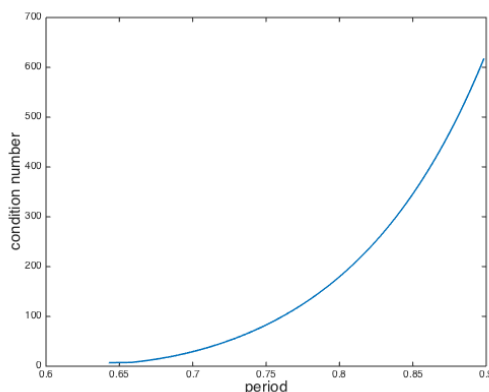


FIGURE A.10. Condition number of $\text{Hess}\theta$ as a function of the period for defocusing (mKdV), that is $\gamma = 3$ and $e = -1$, with $c = -100$ and $\lambda = -60$ kept fixed. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.005$.

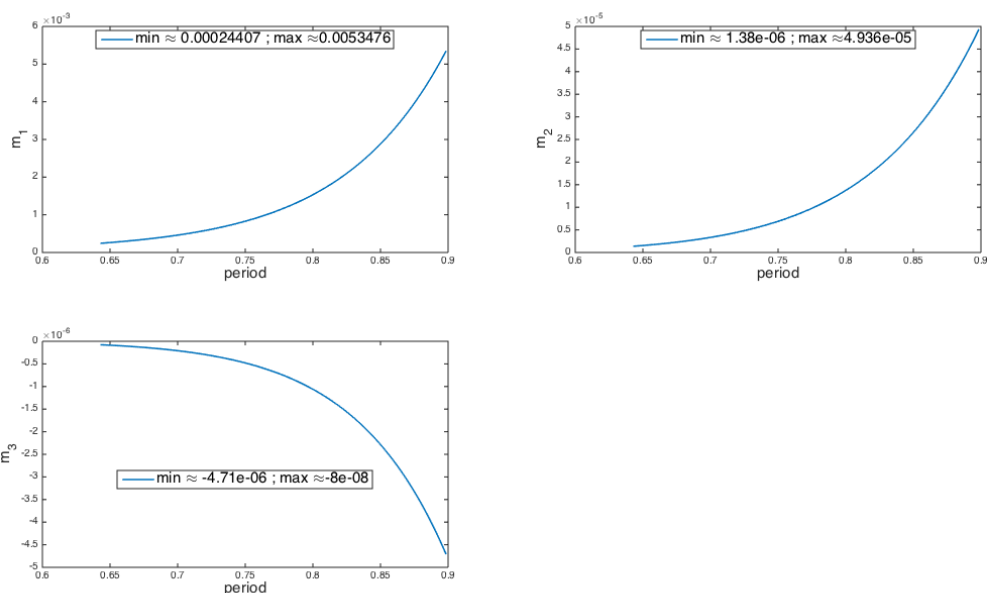


FIGURE A.11. Upper left : $m_1 = \theta_{\mu\mu}$; upper right : $m_2 = \theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2$; and lower left : $m_3 = \det \text{Hess}\theta$, as a function of the period for defocusing (mKdV), with the same data as in Figure A.10.

Let us come back to the focusing gKdV, with this time $\gamma = 4$. This is a non integrable case, for which we are not aware of any analytical result regarding the stability of periodic waves. It is only known from [104] that solitary waves are orbitally stable, which is a necessary condition for the stability of periodic waves of large period, by the work by Gardner [61]. Numerical difficulties arise here at both ends. We have indeed large values of the condition number in both the small amplitude limit and the soliton limit, as can be seen on Figure A.12. Nevertheless, there is numerical evidence for stability (Johnson's conditions in (130) are satisfied) at least for intermediate periods, for which the numerical results are most reliable, see Figure A.13.

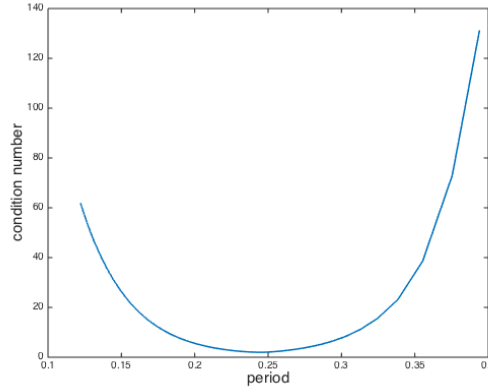


FIGURE A.12. Condition number of $\text{Hess}\theta$ as a function of the period for (gKdV) with $\gamma = 4$ and $e = 1$, and $c = 1000$, $\lambda = -500$ kept fixed. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.005$.

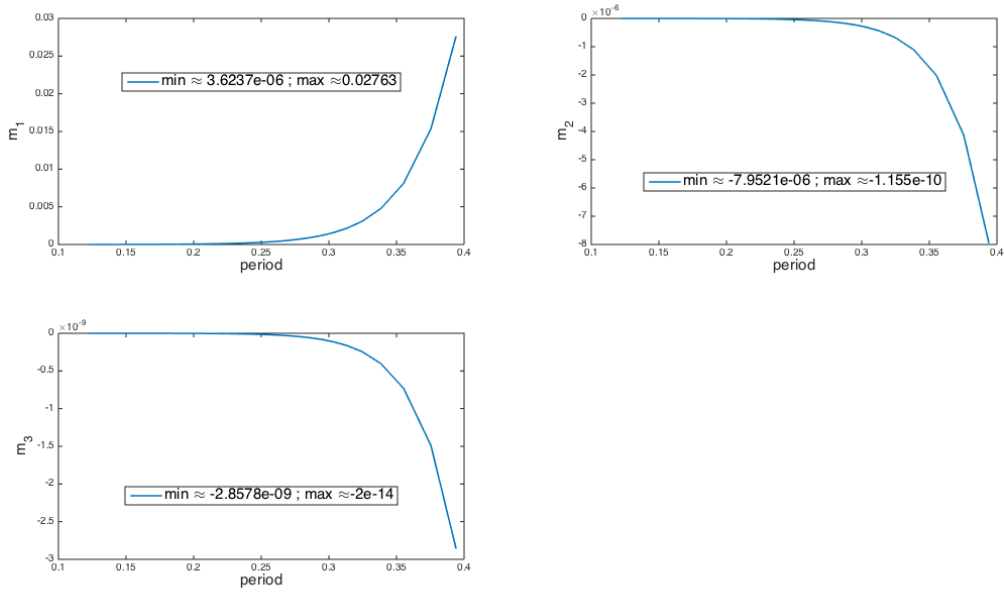


FIGURE A.13. Upper left : $m_1 = \theta_{\mu\mu}$; upper right : $m_2 = \theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2$; and lower left : $m_3 = \det \text{Hess}\theta$, as a function of the period for (gKdV) with $\gamma = 4$ and $e = 1$, with the same data as in Figure A.12.

6.2.3. More EK test cases

Let us now focus on the Euler–Korteweg system. As for the NLS case, we investigate the orbital stability conditions for both (EKL) and (EKE), so as to check that stability occurs at the same time in the two formulations. First, we consider a Boussinesq pressure law

$$p(v) = v - v^\gamma ,$$

with a constant capillarity $\cap \equiv 1$. In what follows, we take $\gamma = 2$, which corresponds to the *good* Boussinesq equation, as in [34, § 4.2.1].

Numerical results are displayed on Figures A.14-A.15. We observe a transition at period $\Upsilon_0 \simeq 3.68$, where $\det \text{Hess}\Theta$ changes sign (and $n(\text{Hess}\Theta)$ passes from 2 to 3). For periods smaller than Υ_0 , we see that we are in the range of application of Theorems A.23 & A.24, which imply orbital stability for both (EKL) and (EKE). For periods larger than Υ_0 , since $\det \text{Hess}\Theta < 0$, Theorem A.1 implies spectral instability. We checked that the zone around Υ_0 where the condition number becomes very high does not depend on our choice of discretization steps — unlike what happens in the KdV/NLS cases for periods approaching the harmonic one or going to infinity. The transition at Υ_0 is not a numerical artifact. Our conclusions are thus consistent with those in [72], where it is pointed out that, at a fixed velocity, there exists a maximal period for the wave to be stable.

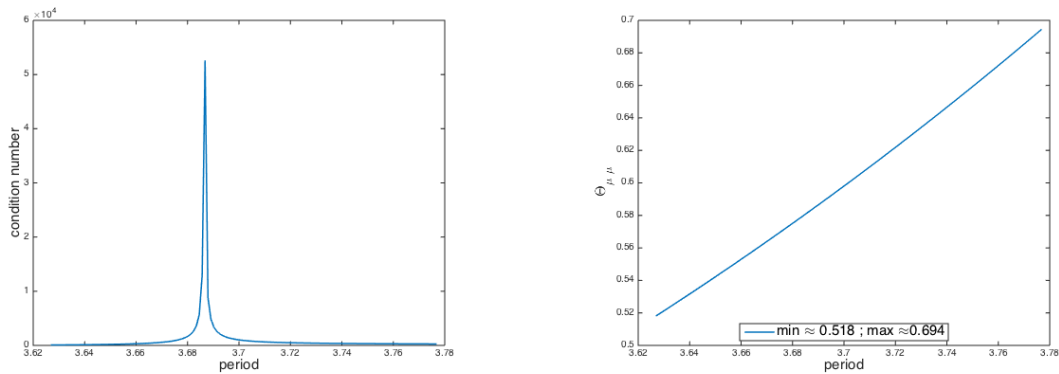


FIGURE A.14. Left : condition number of $\text{Hess}\Theta$ as a function of the period for EKL with Boussinesq pressure law with $\gamma = 2$, $j = -0.1$, $\sigma = 0$, $\mu = -2$ kept fixed. Right : $\Theta_{\mu\mu}$. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.5 \cdot 10^{-4}$.

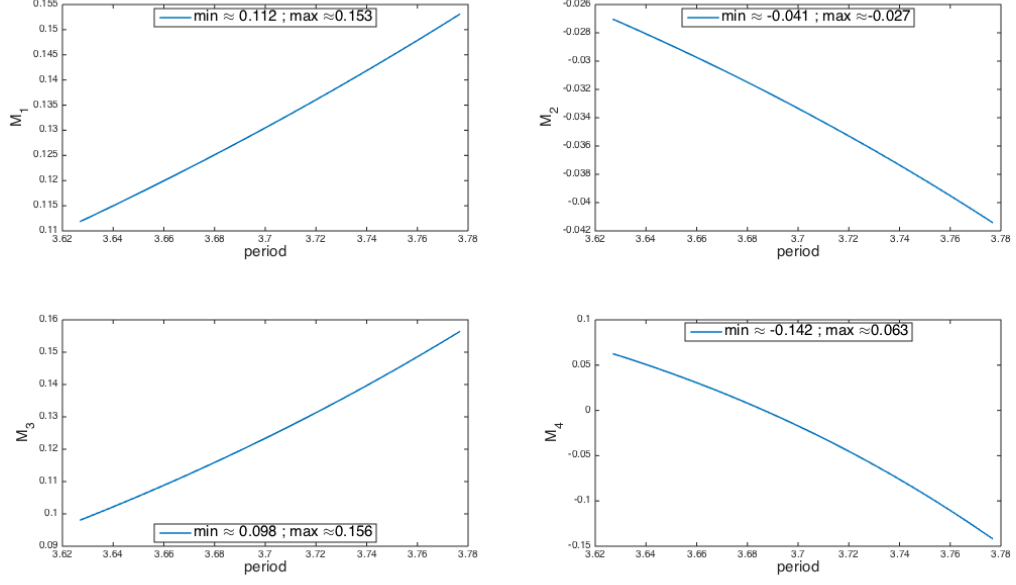


FIGURE A.15. The four principal minors : $M_1 = \Theta_{\lambda\lambda}$ (upper left) ; $M_2 = \Theta_{\mu\mu}\Theta_{\lambda\lambda} - \Theta_{\lambda\mu}^2$ (upper right) ; M_3 (lower left) ; and $M_4 = \det(\text{Hess}\Theta)$ (lower right), for EKL with Boussinesq pressure law with $\gamma = 2$ and the same data as on Figure A.14.

Let us now consider a last case. The perfect gas pressure law

$$p(v) = 1/2v ,$$

with a constant capillarity $\mathfrak{m}(\rho) \equiv 1$, or equivalently, $\mathfrak{n}(v) = 1/v^5$.

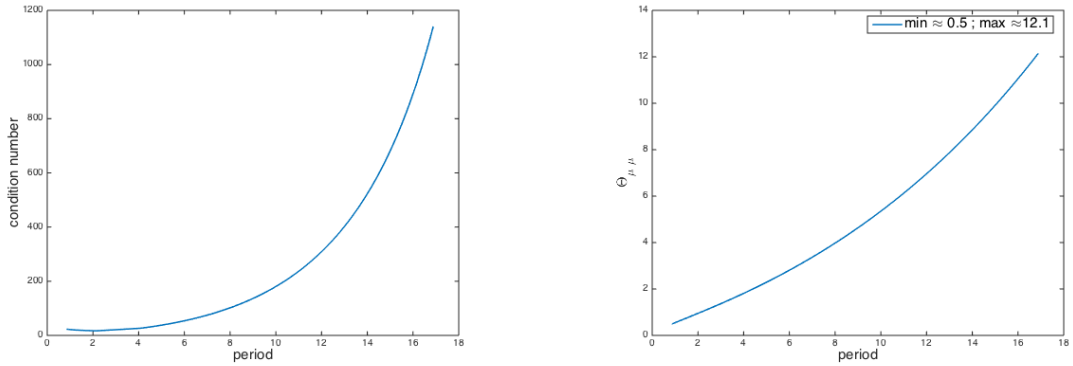


FIGURE A.16. Left : condition number of $\text{Hess}\Theta$ as a function of the period for EK with the perfect gas pressure law, with $j = -1$, $\sigma = 0$, $\mu = -2.5$ kept fixed. Right : $\Theta_{\mu\mu}$. Finite difference step size : $\Delta\nu = 0.5 \cdot 10^{-4}$.

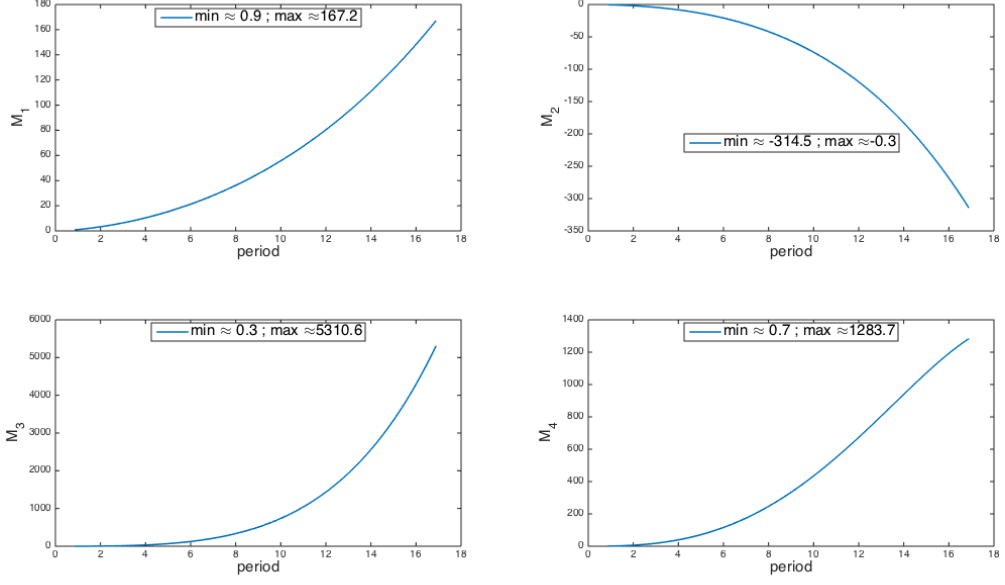


FIGURE A.17. The four principal minors : $M_1 = \Theta_{\lambda\lambda}$ (upper left) ; $M_2 = \Theta_{\mu\mu}\Theta_{\lambda\lambda} - \Theta_{\lambda\mu}^2$ (upper right) ; M_3 (lower left) ; and $M_4 = \det(\text{Hess}\Theta)$ (lower right), for EKL with the perfect gas pressure law and the same data as in Figure A.16.

We observe that (\mathbf{S}_L) and (\mathbf{S}_E) are satisfied, so that both Theorems A.23 & A.24 apply. The tested periodic waves in the Euler–Korteweg system with the perfect gas pressure law are orbitally stable in both mass Lagrangian coordinates and Eulerian coordinates.

7. Appendix : Algebraic computations regarding Θ and θ

Recall from (148) that

$$\Theta(\mu, \lambda, j, \sigma) = \theta(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2, j\sigma - \mu, -j^2),$$

and that the subscripts μ, λ, c will denote, when attached to θ , partial derivatives of θ with respect to its first, second, and third variable respectively. Therefore, by applying twice the chain rule we obtain

$$\begin{aligned} \text{Hess}\Theta &= \begin{pmatrix} \Theta_{\mu\mu} & \Theta_{\lambda\mu} & \Theta_{j\mu} & \Theta_{\sigma\mu} \\ \Theta_{\mu\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} & \Theta_{j\lambda} & \Theta_{\sigma\lambda} \\ \Theta_{\mu j} & \Theta_{\lambda j} & \Theta_{jj} & \Theta_{\sigma j} \\ \Theta_{\mu\sigma} & \Theta_{\lambda\sigma} & \Theta_{j\sigma} & \Theta_{\sigma\sigma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \theta_{\lambda\lambda} & -\theta_{\lambda\mu} & -\sigma\theta_{\lambda\lambda} + 2j\theta_{c\lambda} & -j\theta_{\lambda\lambda} + \sigma\theta_{\lambda\mu} \\ & \theta_{\mu\mu} & -2j\theta_{c\mu} + \sigma\theta_{\lambda\mu} & -\sigma\theta_{\mu\mu} + j\theta_{\lambda\mu} \\ & & 4j^2\theta_{cc} + \sigma^2\theta_{\lambda\lambda} & j\sigma\theta_{\lambda\lambda} - 2j^2\theta_{c\lambda} + 2j\sigma\theta_{c\mu} \\ & & -4j\sigma\theta_{c\lambda} - 2\theta_c & -\sigma^2\theta_{\lambda\mu} + \theta_\lambda \\ & & & j^2\theta_{\lambda\lambda} + \sigma^2\theta_{\mu\mu} \\ & & & -2j\sigma\theta_{\lambda\mu} - \theta_\mu \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

where the entries of $\text{Hess}\Theta$ are evaluated at $(\mu, \lambda, j, \sigma)$, while the derivatives of θ are meant to be evaluated at $(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2, j\sigma - \mu, -j^2)$ — all along this section¹⁶ —, and we have omitted to write the symmetric entries under the diagonal in order to save some space.

By elementary manipulations on columns and rows — as in Proposition A.11 — we thus find a matrix $\mathbf{Q} \in \text{SL}_4(\mathbb{R})$ such that

$$\mathbf{Q}(\text{Hess}\Theta)\mathbf{Q}^\top = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \theta_{\lambda\lambda} & -\theta_{\lambda\mu} & 2j\theta_{c\lambda} & 0 \\ \hline -\theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} & -2j\theta_{c\mu} & 0 \\ \hline 2j\theta_{c\lambda} & -2j\theta_{c\mu} & 4j^2\theta_{cc} - 2\theta_c & \theta_\lambda \\ \hline 0 & 0 & \theta_\lambda & -\theta_\mu \end{array} \right).$$

Assuming that $j \neq 0$ — and recalling that $\Upsilon = \theta_\mu > 0$ — we can perform further manipulations, and thus find $\mathbf{R} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ such that $\det \mathbf{R} = 1/(2j)$ and

$$(155) \quad \mathbf{R}(\text{Hess}\Theta)\mathbf{R}^\top = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\lambda\mu} & \theta_{c\lambda} & 0 \\ \hline \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} & \theta_{c\mu} & 0 \\ \hline \theta_{c\lambda} & \theta_{c\mu} & \theta_{cc} - \eta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\theta_\mu \end{array} \right), \quad \eta := (2\theta_c\theta_\mu - \theta_\lambda^2)/(4j^2\theta_\mu).$$

Observe that the upper 3×3 block in the right-hand side is $\text{Hess}\theta - \eta J$, where

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In particular, (155) yields

$$\frac{1}{4j^2} \det(\text{Hess}\Theta) = -\theta_\mu \det(\text{Hess}\theta - \eta J),$$

which equivalently reads

$$\det(\text{Hess}\Theta) = (2\theta_c\theta_\mu - \theta_\lambda^2)(\theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2) - 4j^2\theta_\mu \det(\text{Hess}\theta).$$

Since $\theta_\mu > 0$, (155) also gives

$$n(\text{Hess}\Theta) = 1 + n(\text{Hess}\theta - \eta J).$$

This proves Eqs. (150) and (151).

We can also draw some sign tables that yield the signatures of $\text{Hess}\theta$, \mathbf{C}_L , and \mathbf{C}_E by inspection of their minors.

Let us first consider \mathbf{C}_L , written as in (143),

$$\mathbf{C}_L = -\frac{1}{\Theta_{\lambda\lambda}} \left(\begin{array}{c|c|c|c} \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\mu\mu} & \Theta_{\lambda\mu} \\ \Theta_{\mu\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\mu\sigma} & \Theta_{\lambda\sigma} \\ \Theta_{\mu\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\mu j} & \Theta_{\lambda j} \\ \Theta_{\mu\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \\ \hline \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\sigma\mu} & \Theta_{\lambda\mu} \\ \Theta_{\sigma\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\sigma\sigma} & \Theta_{\lambda\sigma} \\ \Theta_{\sigma\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{\sigma j} & \Theta_{\lambda j} \\ \Theta_{\sigma\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \\ \hline \left| \begin{array}{cc} \Theta_{j\mu} & \Theta_{\lambda\mu} \\ \Theta_{j\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{j\sigma} & \Theta_{\lambda\sigma} \\ \Theta_{j\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \Theta_{j j} & \Theta_{\lambda j} \\ \Theta_{j\lambda} & \Theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| & \end{array} \right)$$

16. In particular, the reader should keep in mind that with our conventions,

$$\theta_{\lambda\lambda} = \Theta_{\mu\mu}, \quad \theta_{\mu\mu} = \Theta_{\lambda\lambda}.$$

which equivalently reads

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_L &= -\frac{1}{\Theta_{\lambda\lambda}} \left(\begin{array}{c|c|c} \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda\lambda} & -\theta_{\lambda\mu} \\ -\theta_{\mu\lambda} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\theta_{\mu\lambda} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 2j\theta_{\lambda c} & -2j\theta_{\mu c} \\ -\theta_{\mu\lambda} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} 0 & -\theta_{\lambda\mu} \\ 0 & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} -\theta_{\mu} & 0 \\ 0 & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda} & -2j\theta_{\mu c} \\ 0 & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} 2j\theta_{c\lambda} & -\theta_{\lambda\mu} \\ -2j\theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda} & 0 \\ -2j\theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 4j^2\theta_{cc} - 2\theta_c & -2j\theta_{\mu c} \\ -2j\theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \end{array} \right) \\ &= -\frac{1}{\Theta_{\lambda\lambda}} \left(\begin{array}{c|c|c} \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\lambda\mu} \\ \theta_{\mu\lambda} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & 0 & 2j \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda c} & \theta_{\mu c} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \\ 0 & -\theta_{\mu}\theta_{\mu\mu} & \theta_{\lambda}\theta_{\mu\mu} \\ 2j \left| \begin{array}{cc} \theta_{c\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \theta_{\lambda}\theta_{\mu\mu} & 4j^2 \left| \begin{array}{cc} \theta_{cc} & \theta_{\mu c} \\ \theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| - 2\theta_c\theta_{\mu\mu} \end{array} \right) \end{aligned}$$

This is to be compared with the constraint matrix for (qKdV), which is given by

$$\mathbf{c} = -\frac{1}{\theta_{\mu\mu}} \left(\begin{array}{c|c} \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda c} & \theta_{\mu c} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \theta_{c\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \theta_{cc} & \theta_{\mu c} \\ \theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \end{array} \right)$$

Recalling that $\Theta_{\lambda\lambda} = \theta_{\mu\mu}$, we see that the first upper left minors of \mathbf{C}_L and \mathbf{c} are both equal to

$$\Delta_1 := -\frac{1}{\theta_{\mu\mu}} \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| =: \delta_1.$$

The second upper left minor of \mathbf{C}_L is

$$\Delta_2 := -\theta_{\mu} \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| = \theta_{\mu} \theta_{\mu\mu} \delta_1,$$

while the second upper left minor of \mathbf{c} is

$$\delta_2 := \det \mathbf{c} = \frac{1}{(\theta_{\mu\mu})^2} \left| \begin{array}{c|c} \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda c} & \theta_{\mu c} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \theta_{c\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \theta_{cc} & \theta_{\mu c} \\ \theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \end{array} \right| = \frac{1}{\theta_{\mu\mu}} \det(\text{Hess}\theta).$$

As to the third and last first upper left minor of \mathbf{C}_L , it reads

$$\Delta_3 := \det \mathbf{C}_L = \frac{4j^2\theta_{\mu}}{(\theta_{\mu\mu})^2} \left| \begin{array}{c|c} \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda c} & \theta_{\mu c} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \theta_{c\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} \theta_{cc} & \theta_{\mu c} \\ \theta_{c\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| \end{array} \right| - \frac{1}{\theta_{\mu\mu}} (2\theta_c\theta_{\mu} - \theta_{\lambda}^2) \left| \begin{array}{cc} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right|$$

that is,

$$\Delta_3 = 4j^2\theta_{\mu}\delta_2 + (2\theta_c\theta_{\mu} - \theta_{\lambda}^2) \delta_1.$$

Since $\theta_{\mu} = \Upsilon > 0$ and $2\theta_c\theta_{\mu} - \theta_{\lambda}^2 > 0$ (by Cauchy–Schwarz), we can compare $\mathbf{n}(\mathbf{C}_L)$ and $\mathbf{n}(\mathbf{c})$ by drawing the following table, which relies on Sylvester’s invariance theorem¹⁷, and where $+/-$ signs stand for positive/negative values :

17. This theorem implies that the negative signature of an $n \times n$ symmetric matrix is the number of sign changes in the sequence $(1, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$, where Δ_k denotes the matrix’ k -th upper left minor.

$\theta_{\mu\mu}$	$\theta_{\mu\mu}\theta_{\lambda\lambda} - \theta_{\lambda\mu}^2$	$\det(\text{Hess}\theta)$	$n(\text{Hess}\theta)$	δ_1	δ_2	$n(\mathbf{c})$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	$n(\mathbf{C}_L)$	$\det(\text{Hess}\Theta)$
+	+	+	0	-	+	2	-	-	?	≥ 1	?
+	+	-	1	-	-	1	-	-	-	1	+
+	-	-	1	+	-	1	+	+	?	≥ 0	?
+	-	+	2	+	+	0	+	+	+	0	-
-	+	+	2	+	-	1	+	-	?	≥ 1	?
-	+	-	3	+	+	0	+	-	+	2	+
-	-	-	1	-	+	2	-	+	?	≥ 2	?
-	-	+	2	-	-	1	-	+	-	3	-

TABLE A.5. Possible values of signs of minors and negative signatures regarding \mathbf{C}_L

We have used here above the additional observation (already made in [21, Remark 2]) that

$$\left| \begin{array}{cc|cc} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} & \theta_{\lambda c} & \theta_{\mu c} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} & \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{array} \right| = \theta_{\mu\mu} \det(\text{Hess}\theta).$$

Similarly as for \mathbf{C}_L , we can express

$$\mathbf{C}_E = -\frac{1}{\Theta_{\mu\mu}} \left(\begin{array}{cc|cc|cc} \Theta_{\lambda\lambda} & \Theta_{\mu\lambda} & \Theta_{\lambda j} & \Theta_{\mu j} & \Theta_{\lambda\sigma} & \Theta_{\mu\sigma} \\ \Theta_{\lambda\mu} & \Theta_{\mu\mu} & \Theta_{\lambda\mu} & \Theta_{\mu\mu} & \Theta_{\lambda\mu} & \Theta_{\mu\mu} \\ \hline \Theta_{j\lambda} & \Theta_{\mu\lambda} & \Theta_{jj} & \Theta_{\mu j} & \Theta_{j\sigma} & \Theta_{\mu\sigma} \\ \Theta_{j\mu} & \Theta_{\mu\mu} & \Theta_{j\mu} & \Theta_{\mu\mu} & \Theta_{j\mu} & \Theta_{\mu\mu} \\ \hline \Theta_{\sigma\lambda} & \Theta_{\mu\lambda} & \Theta_{\sigma j} & \Theta_{\mu j} & \Theta_{\sigma\sigma} & \Theta_{\mu\sigma} \\ \Theta_{\sigma\mu} & \Theta_{\mu\mu} & \Theta_{\sigma\mu} & \Theta_{\mu\mu} & \Theta_{\sigma\mu} & \Theta_{\mu\mu} \end{array} \right)$$

in terms the derivatives of θ as

$$\mathbf{C}_E = -\frac{1}{\theta_{\lambda\lambda}} \left(\begin{array}{cc|cc|cc} \theta_{\mu\mu} & -\theta_{\mu\lambda} & -2j\theta_{\mu c} & 2j\theta_{\lambda c} & 0 & 0 \\ -\theta_{\lambda\mu} & \theta_{\lambda\lambda} & -\theta_{\lambda\mu} & \theta_{\lambda\lambda} & -\theta_{\lambda\mu} & \theta_{\lambda\lambda} \\ \hline -2j\theta_{\mu c} & -\theta_{\lambda\mu} & 4j^2\theta_{cc} - 2\theta_c & 2j\theta_{\lambda c} & \theta_\lambda & 0 \\ 2j\theta_{\lambda c} & \theta_{\lambda\lambda} & 2j\theta_{c\lambda} & \theta_{\lambda\lambda} & 2j\theta_{\lambda c} & \theta_{\lambda\lambda} \\ \hline 0 & -\theta_{\lambda\mu} & \theta_\lambda & 2j\theta_{\lambda c} & -\theta_\mu & 0 \\ 0 & \theta_{\lambda\lambda} & 0 & \theta_{\lambda\lambda} & 0 & \theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right)$$

We thus find that the upper left minors of \mathbf{C}_E are

$$\begin{aligned} \Delta_{E,1} &:= -\frac{1}{\theta_{\lambda\lambda}} \begin{vmatrix} \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} \\ \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu\mu} \end{vmatrix} = \frac{\theta_{\mu\mu}}{\theta_{\lambda\lambda}} \delta_1, \\ \Delta_{E,2} &:= \frac{4j^2}{(\theta_{\lambda\lambda})^2} \begin{vmatrix} \theta_{\mu\mu} & \theta_{\lambda\mu} & \theta_{\mu c} & \theta_{\lambda c} \\ \theta_{\mu\lambda} & \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{\mu\lambda} & \theta_{\lambda\lambda} \\ \theta_{c\mu} & \theta_{\lambda\mu} & \theta_{cc} & \theta_{\lambda c} \\ \theta_{c\lambda} & \theta_{\lambda\lambda} & \theta_{c\lambda} & \theta_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} - \frac{2\theta_c}{\theta_{\lambda\lambda}} \begin{vmatrix} \theta_{\mu\mu} & \theta_{\lambda\mu} \\ \theta_{\mu\lambda} & \theta_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\theta_{\lambda\lambda}} (4j^2 \det \text{Hess}\theta + 2\theta_c \theta_{\mu\mu} \delta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{E,3} = \det \mathbf{C}_E &= \frac{4j^2\theta_\mu}{(\theta_{\lambda\lambda})^2} \left| \begin{array}{c|c} \theta_{\mu\mu} & \theta_{\lambda\mu} \\ \theta_{\mu\lambda} & \theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} \theta_{\mu c} & \theta_{\lambda c} \\ \theta_{\mu\lambda} & \theta_{\lambda\lambda} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\theta_{\lambda\lambda}} (4j^2\theta_\mu \det \text{Hess}\theta + (2\theta_c\theta_\mu - \theta_\lambda^2)\theta_{\mu\mu} \delta_1).\end{aligned}$$

Furthermore, since $\theta_c = \int_0^\Upsilon \frac{1}{2}\varrho^2 > 0$, we can complement Table A.5 with a similar table in terms of the negative signature of \mathbf{C}_E .

$\theta_{\lambda\lambda}$	$\theta_{\lambda\lambda}\theta_{\mu\mu} - \theta_{\lambda\mu}^2$	$\det(\text{Hess}\theta)$	$n(\text{Hess}\theta)$	$\Delta_{E,1}$	$\Delta_{E,2}$	$\Delta_{E,3}$	$n(\mathbf{C}_E)$	$\det(\text{Hess}\Theta)$
+	+	+	0	-	?	?	≥ 1	?
+	+	-	1	-	-	-	1	+
+	-	-	1	+	?	?	≥ 0	?
+	-	+	2	+	+	+	0	-
-	+	+	2	+	?	?	≥ 0	?
-	+	-	3	+	+	+	0	+
-	-	-	1	-	?	?	≥ 2	?
-	-	+	2	-	-	-	1	-

TABLE A.6. Possible values of signs of minors and negative signatures regarding \mathbf{C}_E

Acknowledgement. This work has been partly supported by the European Research Council ERC Starting Grant 2009, project 239983- NuSiKiMo, and by ANR project BoND (ANR-13-BS01-0009-01). The doctoral scholarship of the second author is directly supported by ANR-13-BS01-0009-01. The first author acknowledges the kind hospitality of the Gran Sasso Science Institute in L'Aquila, where this paper was completed. The third author thanks Mat Johnson for helpful guidance through the vast literature on orbital stability of periodic waves of (gKdV).

Bibliographie

- [1] M. J. ABLOWITZ : *Nonlinear dispersive waves*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, New York, 2011. Asymptotic analysis and solitons.
- [2] M. J. ABLOWITZ, D. J. KAUP, A. C. NEWELL et H. SEGUR : The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. *Studies in Appl. Math.*, 53(4):249–315, 1974.
- [3] T. AKHUNOV : Local well-posedness of quasi-linear systems generalizing KdV. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 12(2):899–921, 2013.
- [4] J. ANGULO PAVA : Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions to the Schrödinger and the modified Korteweg-de Vries equations. *J. Differential Equations*, 235(1):1–30, 2007.
- [5] J. ANGULO PAVA : *Nonlinear dispersive equations*, volume 156 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. Existence and stability of solitary and periodic travelling wave solutions.
- [6] J. ANGULO PAVA, J. L. BONA et M. SCIALOM : Stability of cnoidal waves. *Adv. Differential Equations*, 11(12):1321–1374, 2006.
- [7] V. ARNOL'D : *Équations différentielles ordinaires*. Traduit du Russe : Mathématiques. [Translations of Russian Works : Mathematics]. “Mir”, Moscow, fourth édition, 1988. Translated from the Russian by Djilali Embarek.
- [8] L. K. ARRUDA : Nonlinear stability properties of periodic travelling wave solutions of the classical Korteweg-de Vries and Boussinesq equations. *Port. Math.*, 66(2):225–259, 2009.
- [9] T. B. BENJAMIN : The stability of solitary waves. *Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A*, 328:153–183, 1972.
- [10] T. B. BENJAMIN : Impulse, flow force and variational principles. *IMA J. Appl. Math.*, 32(1-3):3–68, 1984.
- [11] T. B. BENJAMIN et J. E. FEIR : The disintegration of wave trains on deep water part 1. theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(3):417–430, Feb 1967.
- [12] S. BENZONI-GAVAGE : EDP dispersives. 3rd cycle. Lyon. HAL Id : cel-00582332, version 1, janvier 2009.
- [13] S. BENZONI-GAVAGE : Local well-posedness of nonlocal Burgers equations. *Differential Integral Equations*, 22(3-4):303–320, 2009.
- [14] S. BENZONI-GAVAGE : Planar traveling waves in capillary fluids. *Differential Integral Equations*, 26(3-4):439–485, 2013.
- [15] S. BENZONI-GAVAGE, R. DANCHIN et S. DESCOMBES : Well-posedness of one-dimensional Korteweg models. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 59, 35 pp. (electronic), 2006.
- [16] S. BENZONI-GAVAGE, R. DANCHIN et S. DESCOMBES : On the well-posedness for the Euler-Korteweg model in several space dimensions. *Indiana Univ. Math. J.*, 56(4):1499–1579, 2007.
- [17] S. BENZONI-GAVAGE, R. DANCHIN, S. DESCOMBES et D. JAMET : Structure of Korteweg models and stability of diffuse interfaces. *Interfaces Free Boundaries*, 7:371–414, 2005.
- [18] S. BENZONI-GAVAGE, C. MIETKA et L. M. RODRIGUES : Modulated equations of Hamiltonian PDEs and dispersive shocks. forthcoming.
- [19] S. BENZONI-GAVAGE, C. MIETKA et L. M. RODRIGUES : Co-periodic stability of periodic waves in some Hamiltonian PDEs. working paper or preprint, mai 2015.
- [20] S. BENZONI-GAVAGE, C. MIETKA et L. M. RODRIGUES : Co-periodic stability of periodic waves in some Hamiltonian PDEs. *Nonlinearity*, 29(11):3241, 2016.
- [21] S. BENZONI-GAVAGE, P. NOBLE et L. M. RODRIGUES : Stability of periodic waves in Hamiltonian PDEs. In *GDR Analyse des EDP*. cedram, 2013. arXiv :1312.1964v1.
- [22] S. BENZONI-GAVAGE, P. NOBLE et L. M. RODRIGUES : Slow modulations of periodic waves in Hamiltonian PDEs, with application to capillary fluids. *J. Nonlinear Sci.*, 24(4):711–768, 2014.

- [23] J. L. BONA et R. L. SACHS : Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation. *Comm. Math. Phys.*, 118(1):15–29, 1988.
- [24] J. L. BONA et R. SMITH : The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 278(1287):555–601, 1975.
- [25] J. L. BONA, P. E. SOUGANIDIS et W. A. STRAUSS : Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 411(1841):395–412, 1987.
- [26] N. BOTTMAN et B. DECONINCK : KdV cnoidal waves are spectrally stable. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 25(4):1163–1180, 2009.
- [27] N. BOTTMAN, B. DECONINCK et M. NIVALA : Elliptic solutions of the defocusing NLS equation are stable. *J. Phys. A*, 44(28):285201, 24, 2011.
- [28] F. BOUCHUT : *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [29] J. BOURGAIN : Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation. *Geom. Funct. Anal.*, 3(3):209–262, 1993.
- [30] J. BOUSSINESQ : Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d’un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pures Appl.*, 17(2):55–108, 1872.
- [31] J. C. BRONSKI, V. M. HUR et M. A. JOHNSON : Modulational instability in equations of KdV type. In *New approaches to nonlinear waves*, volume 908 de *Lecture Notes in Phys.*, pages 83–133. Springer, Cham, 2016.
- [32] J. C. BRONSKI et M. A. JOHNSON : The modulational instability for a generalized Korteweg-de Vries equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 197(2):357–400, 2010.
- [33] J. C. BRONSKI, M. A. JOHNSON et T. KAPITULA : An index theorem for the stability of periodic traveling waves of Korteweg-de Vries type. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 141(6):1141–1173, 2011.
- [34] J. C. BRONSKI, M. A. JOHNSON et T. KAPITULA : An instability index theory for quadratic pencils and applications. *Comm. Math. Phys.*, 327(2):521–550, 2014.
- [35] F. CHARDARD et T. J. BRIDGES : Transversality of homoclinic orbits, the Maslov index and the symplectic Evans function. *Nonlinearity*, 28(1):77–102, 2015.
- [36] C. CHICONE : The monotonicity of the period function for planar Hamiltonian vector fields. *J. Differential Equations*, 69(3):310–321, 1987.
- [37] M. CHRIST, J. COLLIANDER et T. TAO : Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations. *Amer. J. Math.*, 125(6):1235–1293, 2003.
- [38] J. COLLIANDER, M. KEEL, G. STAFFILANI, H. TAKAOKA et T. TAO : Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on \mathbb{R} and \mathbb{T} . *J. Amer. Math. Soc.*, 16(3):705–749 (electronic), 2003.
- [39] J. COLLIANDER, M. KEEL, G. STAFFILANI, H. TAKAOKA et T. TAO : Multilinear estimates for periodic KdV equations, and applications. *J. Funct. Anal.*, 211(1):173–218, 2004.
- [40] W. CRAIG, T. KAPPELER et W. STRAUSS : Gain of regularity for equations of KdV type. *Annales de l’institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire*, 9(2):147–186, 1992.
- [41] Stephan DE BIEVRE, François GENOUD et Simona ROTA NODARI : Orbital stability : analysis meets geometry. juillet 2014.
- [42] B. DECONINCK et T. KAPITULA : On the orbital (in)stability of spatially periodic stationary solutions of generalized Korteweg-de Vries equations. 2010.
- [43] B. DECONINCK et T. KAPITULA : The orbital stability of the cnoidal waves of the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Lett. A*, 374(39):4018–4022, 2010.
- [44] B. DECONINCK et M. NIVALA : The stability analysis of the periodic traveling wave solutions of the mKdV equation. *Stud. Appl. Math.*, 126(1):17–48, 2011.
- [45] C. L. DODGSON : Condensation of determinants, being a new and brief method for computing their arithmetical values. *Proceedings of the Royal Society of London*, 15:150–155, 1866.
- [46] A. DOELMAN, B. SANDSTEDE, A. SCHEEL et G. SCHNEIDER : The dynamics of modulated wave trains. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 199(934):viii+105, 2009.
- [47] B. DUBROVIN : Hamiltonian PDEs : deformations, integrability, solutions. *J. Phys. A*, 43(43):434002, 20, 2010.
- [48] B. A. DUBROVIN : Hamiltonian partial differential equations and Painlevé transcendents, mai 2015. Conference Dispersive Hydrodynamics : The Mathematics of Dispersive Shock Waves and Applications, at Banff International Research Station.

- [49] W. ECKHAUS et A. van HARTEN : *The inverse scattering transformation and the theory of solitons*, volume 50 de *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981. An introduction.
- [50] G. A. EL : Resolution of a shock in hyperbolic systems modified by weak dispersion. *Chaos*, 15(3):037103, 21, 2005.
- [51] G. A. EL, V. V. GEOGJAEV, A. V. GUREVICH et A. L. KRYLOV : Decay of an initial discontinuity in the defocusing NLS hydrodynamics. *Phys. D*, 87(1-4):186–192, 1995. The nonlinear Schrödinger equation (Chernogolovka, 1994).
- [52] G. A. EL et M. A. HOEFER : Dispersive shock waves and modulation theory. *Phys. D*, 333:11–65, 2016.
- [53] G. A. EL, M. A. HOEFER et M. SHEARER : Dispersive and diffusive-dispersive shock waves for non-convex conservation laws. arXiv :1501.01681v3, 2016.
- [54] R. H. ENNS : *It's a nonlinear world*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer, New York, 2011.
- [55] T. GALLAY et M. HÄRÄĞUŞ : Orbital stability of periodic waves for the nonlinear Schrödinger equation. *J. Dynam. Differential Equations*, 19(4):825–865, 2007.
- [56] T. GALLAY et M. HÄRÄĞUŞ : Stability of small periodic waves for the nonlinear Schrödinger equation. *J. Differential Equations*, 234(2):544–581, 2007.
- [57] T. GALLAY et D. PELINOVSKY : Orbital stability in the cubic defocusing NLS equation : I. Cnoidal periodic waves. *J. Differential Equations*, 258(10):3607–3638, 2015.
- [58] C. S. GARDNER, J. M. GREENE, M. D. KRUSKAL et R. M. MIURA : Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation. *Physical Review Letters*, 19:1095–1097, novembre 1967.
- [59] C. S. GARDNER, J. M. GREENE, M. D. KRUSKAL et R. M. MIURA : Korteweg-de Vries equation and generalization. VI. Methods for exact solution. *Comm. Pure Appl. Math.*, 27:97–133, 1974.
- [60] R. A. GARDNER : On the structure of the spectra of periodic travelling waves. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 72(5):415–439, 1993.
- [61] R. A. GARDNER : Spectral analysis of long wavelength periodic waves and applications. *J. Reine Angew. Math.*, 491:149–181, 1997.
- [62] A. GARIJO et J. VILLADELPRAT : Algebraic and analytical tools for the study of the period function. *J. Differential Equations*, 257(7):2464–2484, 2014.
- [63] S. L. GAVRILYUK et D. SERRE : A model of a plug-chain system near the thermodynamic critical point : connection with the Korteweg theory of capillarity and modulation equations. In *Waves in liquid/gas and liquid/vapour two-phase systems (Kyoto, 1994)*, volume 31 de *Fluid Mech. Appl.*, pages 419–428. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [64] E. GODLEWSKI et P-A. RAVIART : *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [65] T. GRAVA et C. KLEIN : Numerical solution of the small dispersion limit of Korteweg-de Vries and Whitham equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(11):1623–1664, 2007.
- [66] T. GRAVA et C. KLEIN : A numerical study of the small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation and asymptotic solutions. *Phys. D*, 241(23-24):2246–2264, 2012.
- [67] M. GRILLAKIS, J. SHATAH et W. A. STRAUSS : Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I. *J. Funct. Anal.*, 74(1):160–197, 1987.
- [68] K. GRUNERT et G. TESCHL : Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation via nonlinear steepest descent. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 12(3):287–324, 2009.
- [69] A. GRÜNROCK : A bilinear Airy-estimate with application to gKdV-3. *Differential Integral Equations*, 18(12):1333–1339, 2005.
- [70] Z. GUO : Global well-posedness of Korteweg-de Vries equation in $H^{-3/4}(\mathbb{R})$. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 91(6):583–597, 2009.
- [71] A. V. GUREVICH et L. P. PITAEVSKII : Nonstationary structure of a collisionless shock wave. *Sov. Phys. JETP*, 38:291, 1987.
- [72] S. HAKKAEV, M. STANISLAVOVA et A. STEFANOV : Linear stability analysis for periodic travelling waves of the Boussinesq equation and the Klein-Gordon-Zakharov system. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 144:455–489, 6 2014.
- [73] M. HÄRÄĞUŞ et T. KAPITULA : On the spectra of periodic waves for infinite-dimensional Hamiltonian systems. *Phys. D*, 237(20):2649–2671, 2008.

- [74] E. V. HAYNSWORTH : Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix. *Linear Algebra and Appl.*, 1(1):73–81, 1968.
- [75] M. A. HOEFER : Shock waves in dispersive Eulerian fluids. *J. Nonlinear Sci.*, 24(3):525–577, 2014.
- [76] R. JENKINS : Regularization of a sharp shock by the defocusing nonlinear schrödinger equation. arXiv :1402.4708, 2014.
- [77] M. A. JOHNSON : Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 41(5):1921–1947, 2009.
- [78] M. A. JOHNSON, P. NOBLE, L. M. RODRIGUES et K. ZUMBRUN : Behavior of periodic solutions of viscous conservation laws under localized and nonlocalized perturbations. *Invent. Math.*, 197(1):115–213, 2014.
- [79] M. A. JOHNSON et K. ZUMBRUN : Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions of systems of viscous conservation laws in the generic case. *J. Differential Equations*, 249(5):1213–1240, 2010.
- [80] M. A. JOHNSON, K. ZUMBRUN et J. C. BRONSKI : On the modulation equations and stability of periodic generalized Korteweg-de Vries waves via Bloch decompositions. *Phys. D*, 239(23-24):2057–2065, 2010.
- [81] C. K. R. T. JONES, R. MARANGELL, P. D. MILLER et R. G. PLAZA : Spectral and modulational stability of periodic wavetrains for the nonlinear Klein-Gordon equation. *J. Differential Equations*, 257(12):4632–4703, 2014.
- [82] A. M. KAMCHATNOV : *Nonlinear periodic waves and their modulations*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000. An introductory course.
- [83] T. KAPITULA, P. G. KEVREKIDIS et B. SANDSTEDE : Counting eigenvalues via the Krein signature in infinite-dimensional Hamiltonian systems. *Phys. D*, 195(3-4):263–282, 2004.
- [84] T. KAPITULA et K. PROMISLOW : *Spectral and dynamical stability of nonlinear waves*, volume 185 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2013. With a foreword by Christopher K. R. T. Jones.
- [85] T. KAPITULA et B. SANDSTEDE : Stability of bright solitary-wave solutions to perturbed nonlinear Schrödinger equations. *Phys. D*, 124(1-3):58–103, 1998.
- [86] T. KATO : Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. In *Spectral theory and differential equations (Proc. Sympos., Dundee, 1974; dedicated to Konrad Jörgens)*, pages 25–70. Lecture Notes in Math., Vol. 448. Springer, Berlin, 1975.
- [87] C. E. KENIG, Gustavo P. et L. VEGA : A bilinear estimate with applications to the KdV equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(2):573–603, 1996.
- [88] C. E. KENIG, G. PONCE et L. VEGA : The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices. *Duke Math. J.*, 71(1):1–21, 1993.
- [89] C. E. KENIG, G. PONCE et L. VEGA : Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle. *Comm. Pure Appl. Math.*, 46(4):527–620, 1993.
- [90] C. E. KENIG, G. PONCE et L. VEGA : The Cauchy problem for quasi-linear Schrödinger equations. *Invent. Math.*, 158(2):343–388, 2004.
- [91] N. KISHIMOTO : Well-posedness of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation at the critical regularity. *Differential Integral Equations*, 22(5-6):447–464, 2009.
- [92] W. K. LIM et G. PONCE : On the initial value problem for the one dimensional quasi-linear Schrödinger equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 34(2):435–459 (electronic), 2002.
- [93] F. LINARES, G. PONCE et D. L. SMITH : On the regularity of solutions to a class of nonlinear dispersive equations. arXiv :1510.02512, 2015.
- [94] A. LUNARDI : *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1995. [2013 reprint of the 1995 original] [MR1329547].
- [95] W. MAGNUS et S. WINKLER : *Hill's equation*. Dover Publications, Inc., New York, 1979. Corrected reprint of the 1966 edition.
- [96] C. MIETKA : On the well-posedness of a quasi-linear Korteweg-de Vries equation. to appear in *Ann. Math.* Blaise Pascal (arXiv :1601.00779).
- [97] A. MIKIKITS-LEITNER : *Long-Time Asymptotics for the Asymptotically Periodic Korteweg-de Vries Equation*. Thèse de doctorat, Universität Wien, 2009.
- [98] R. M. MIURA : Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation. *J. Mathematical Phys.*, 9:1202–1204, 1968.

- [99] F. NATALI et A. NEVES : Orbital stability of periodic waves. *IMA J. Appl. Math.*, 79(6):1161–1179, 2014.
- [100] A. NEVES : Floquet’s theorem and stability of periodic solitary waves. *J. Dynam. Differential Equations*, 21(3):555–565, 2009.
- [101] M. OH et K. ZUMBRUN : Stability and asymptotic behavior of periodic traveling wave solutions of viscous conservation laws in several dimensions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 196(1):1–20, 2010.
- [102] P. J. OLVER : *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1993.
- [103] A. PAZY : *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [104] R. L. PEGO et M. I. WEINSTEIN : Eigenvalues, and instabilities of solitary waves. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 340(1656):47–94, 1992.
- [105] A. POGAN, A. SCHEEL et K. ZUMBRUN : Quasi-gradient systems, modulational dichotomies, and stability of spatially periodic patterns. *Differential Integral Equations*, 26(3-4):389–438, 2013.
- [106] M. REED et B. SIMON : *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.
- [107] L. M. RODRIGUES : *Asymptotic stability and modulation of periodic wavetrains, general theory & applications to thin film flows*. Habilitation à diriger des recherches, Université Lyon 1, 2013.
- [108] L. M. RODRIGUES : Linear asymptotic stability and modulation behavior near periodic waves of the korteweg–de vries equation. forthcoming, 2015.
- [109] L. Miguel RODRIGUES et Kevin ZUMBRUN : Periodic-coefficient damping estimates, and stability of large-amplitude roll waves in inclined thin film flow. *SIAM J. Math. Anal.*, 48(1):268–280, 2016.
- [110] R. SCHAFF : A class of Hamiltonian systems with increasing periods. *J. Reine Angew. Math.*, 363:96–109, 1985.
- [111] G. SCHNEIDER : Diffusive stability of spatial periodic solutions of the Swift-Hohenberg equation. *Comm. Math. Phys.*, 178(3):679–702, 1996.
- [112] G. SCHNEIDER : Nonlinear diffusive stability of spatially periodic solutions—abstract theorem and higher space dimensions. In *Proceedings of the International Conference on Asymptotics in Nonlinear Diffusive Systems (Sendai, 1997)*, volume 8 de *Tohoku Math. Publ.*, pages 159–167, Sendai, 1998. Tohoku Univ.
- [113] S. H. SCHOCHET et M. I. WEINSTEIN : The nonlinear Schrödinger limit of the Zakharov equations governing Langmuir turbulence. *Comm. Math. Phys.*, 106(4):569–580, 1986.
- [114] D. SERRE : *Systems of conservation laws. 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Hyperbolicity, entropies, shock waves, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
- [115] D. SERRE : Spectral stability of periodic solutions of viscous conservation laws : large wavelength analysis. *Comm. Partial Differential Equations*, 30(1-3):259–282, 2005.
- [116] J. C. STRIKWERDA : *Finite difference schemes and partial differential equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, second édition, 2004.
- [117] T. R. TAHA et M. J. ABLOWITZ : Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. III. Numerical, Korteweg-de Vries equation. *J. Comput. Phys.*, 55(2):231–253, 1984.
- [118] G. TESCHL : *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [119] L. N. TREFETHEN et M. EMBREE : *Spectra and pseudospectra*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. The behavior of nonnormal matrices and operators.
- [120] L. N. TREFETHEN et J. A. C. WEIDEMAN : The exponentially convergent trapezoidal rule. *SIAM Rev.*, 56(3):385–458, 2014.
- [121] G. B. WHITHAM : Non-linear dispersive waves. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 283:238–261, 1965.
- [122] G. B. WHITHAM : Two-timing, variational principles and waves. *J. Fluid Mech.*, 44:373–395, 1970.
- [123] G. B. WHITHAM : *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [124] N. J. ZABUSKY et M. D. KRUSKAL : Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15:240–243, Aug 1965.
- [125] V. E. ZAKHAROV : Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Zh. Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz.*, 9:86–94, 1968. Transl. J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 9 (1968) 190-194.
- [126] V. E. ZAKHAROV et L. A. OSTROVSKY : Modulation instability : the beginning. *Phys. D*, 238(5):540–548, 2009.

Ondes périodiques dans des systèmes d'ÉDP hamiltoniens

Stabilité, modulations et chocs dispersifs

Résumé : On s'intéresse aux ondes périodiques solutions de systèmes d'équations aux dérivées partielles hamiltoniennes. Cette classe de modèles concerne divers domaines des sciences physiques, comme l'optique non-linéaire et la mécanique des fluides. On y trouve des équations célèbres comme l'équation de Korteweg-de Vries généralisée et l'équation de Schrödinger non-linéaire, où non-linéarités et dispersion jouent un rôle important.

La première partie de cette thèse concerne l'étude du problème de Cauchy pour l'équation de KdV quasi-linéaire. On établit un théorème d'existence locale obtenu grâce à des propriétés structurelles et des techniques de jauge qui permettent de compenser les pertes de dérivées apparentes dans les estimations a priori.

Dans la seconde partie, les propriétés de stabilité orbitale co-périodique et modulationnelle sont explorées numériquement en exploitant des critères algébriques tous établis à partir d'une même intégrale d'action et de ses dérivées secondes. Notre méthode utilise des quadratures numériques suivies de différences finies afin de calculer la matrice hessienne de l'intégrale d'action. Le comportement asymptotique de cette matrice nous pousse à prêter beaucoup d'attention à l'étude des ondes de grande période ou de faible amplitude. Les résultats numériques présentés fournissent de nombreuses informations en lien avec des questions ouvertes.

On effectue également des simulations directes sur le système d'ÉDP original pour étudier à la fois le comportement des ondes périodiques sous différents types de perturbations, et les solutions de problèmes de Cauchy avec donnée initiale discontinue. Pour ces derniers, on s'attend à observer des chocs dispersifs, dont la compréhension est basée sur le problème de Gurevich-Pitaevskii, où les équations modulées à la Whitham sont utilisées pour approcher la zone oscillante des chocs. On compare des simulations directes aux solutions idéales du problème de Gurevich-Pitaevskii, en commençant par la célèbre équation de KdV.

Mots clés : onde périodique, dynamique hamiltonienne, dispersion, stabilité, modulation, choc dispersif.

Periodic waves in some Hamiltonian PDEs Stability, modulations and dispersive shocks

Abstract : We are concerned about nonlinear periodic wave solutions to hamiltonian systems of partial differential equations. This class of equations contains many famous equations, like the generalised Korteweg-de Vries equation and the nonlinear Schrödinger equation, and arise in various domains of physical science as fluid mechanics or nonlinear optics where nonlinearity and dispersion prevail.

The first part of this manuscript presents a well-posedness result for a quasi-linear version of the KdV equation. The proof takes advantage of structural properties and gauge techniques to deal with apparent loss of derivatives in a priori estimates.

In the second part, we investigate the modulational and orbital coproperiodic stability of periodic waves by computing algebraic criteria involving the same abbreviated action integral and its second order derivatives. Our method uses numerical integrations followed by finite differences to compute the Hessian matrix of the action integral. We pay attention to the asymptotic behavior of this matrix in the large period and small amplitude limits. The numerical results about stability give some new insight on several analytical open questions.

Finally, direct numerical computations are done on the original system of PDEs to study the behavior of periodic traveling waves under various kinds of perturbations and the solutions of Cauchy problem with discontinuous initial data. For the latter, we expect dispersive shock waves to arise. The building block for understanding dispersive shocks is known as the Gurevich-Pitaevskii problem, in which modulated equations 'à la Whitham' are used as an approximate model for the oscillatory zone. We compare direct numerical simulations to idealized solutions of Gurevich-Pitaevskii problems, starting with the famous KdV equation.

Keywords : periodic wave, hamiltonian dynamics, dispersion, stability, modulation, dispersive shocks.

Image en couverture : Évolution spatio-temporelle d'une onde périodique perturbée de l'équation de KdV.

